

I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS SIMULADO

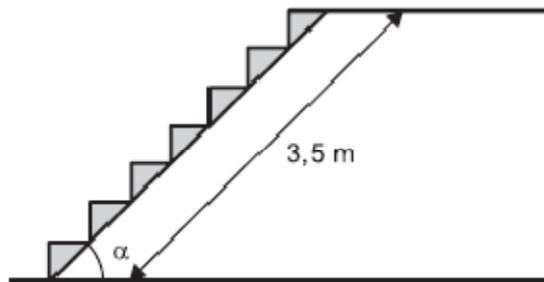
QUESTÃO 01

Um grupo de 6 amigos resolve brincar de “telefone sem fio”. A brincadeira consiste no primeiro da fila passar uma informação para o segundo da fila, que passa a informação para o terceiro, até que o sexto da fila volta e passa a informação para o primeiro. A brincadeira é bem-sucedida, se a informação recebida pelo primeiro é a mesma que ele passou no início. Suponhamos que a probabilidade de sucesso na transmissão da informação de uma pessoa qualquer ao seu vizinho é independente, constante e igual a $\frac{2}{3}$. A probabilidade de a brincadeira ser bem-sucedida é:

- A) $\frac{64}{729}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{60}{85}$
- D) $\frac{12}{21}$
- E) $\frac{75}{128}$

QUESTÃO 02

(Adaptado da USF) Sobre uma rampa plana de 3,5 m de comprimento e inclinação α , como mostra a figura, será construída uma escada com 7 degraus, todos de mesma altura.



Se $\alpha = 30^\circ$, então a altura de cada degrau, em cm, é

- A) 10
- B) 15
- C) 20
- D) 25
- E) 30

QUESTÃO 03

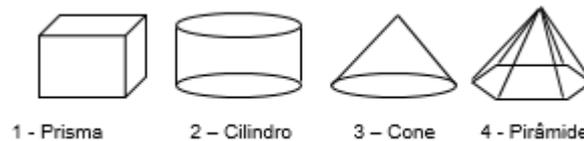
João e Maria têm 3 filhos: Antônio, Berenice e Celso. Eles resolvem realizar uma viagem de carro com partida de Natal e chegada em Muzambinho. Como a viagem é longa, decidiram ir trocando de posições nos cinco assentos do carro em cada uma das paradas para descanso. Ficou acertado que somente os pais poderiam assumir a direção do veículo. Assim, o maior número de posições diferentes com a troca de qualquer número de passageiros que eles podem realizar, sem que se repita uma disposição anterior, é igual a:

- A) 6.
- B) 12.
- C) 36.
- D) 48.
- E) 60.

QUESTÃO 04

Imagine que temos quatro sólidos geométricos conforme as figuras 1, 2, 3 e 4. Todos eles têm a mesma área da base e a mesma altura. O prisma é de chumbo, o cilindro é de vidro, o cone é de madeira e a pirâmide é de isopor. Ao mergulharmos completamente cada um deles em uma mesma vasilha com água, haverá maior mudança no nível dessa água nesse recipiente quando introduzirmos:

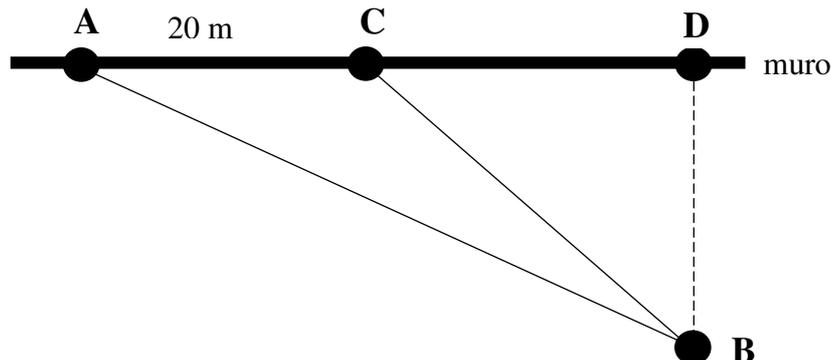
- A) o cone ou a pirâmide.
- B) o cone ou o prisma.
- C) o cilindro ou a pirâmide.
- D) o cilindro ou o prisma.
- E) o prisma ou a pirâmide.



QUESTÃO 05

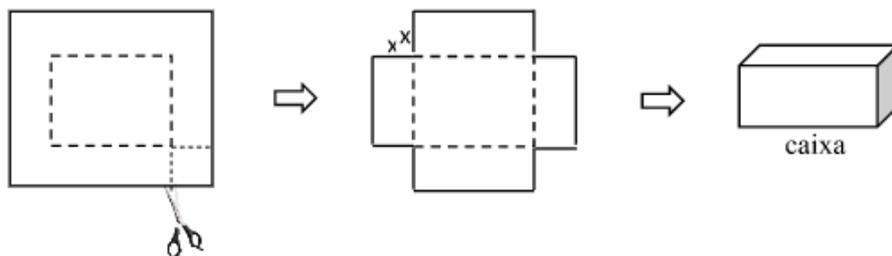
Conforme a figura abaixo, um fio de eletricidade completamente esticado sai do poste A até a casa B. O ângulo entre o fio que parte de A e o muro da propriedade é de 30° . Do outro poste C, que está a 20 metros de A, parte a fiação de telefone até a casa B. O fio que parte de C, por sua vez, faz um ângulo de 45° com o mesmo muro reto. Impedido de invadir a propriedade, Abílio conseguiu saber a menor distância em linha reta da casa até o muro somente com esses dados. Essa distância é mais próxima de: (Considere $\sqrt{3} = 1,7$)

- A) 18,25 m
- B) 19,70 m
- C) 23,25 m
- D) 25,35 m
- E) 26,15 m



QUESTÃO 06

(Adaptado da UNESP) Uma caixa de papelão sem tampa é fabricada da seguinte forma: de um retângulo que mede 20 cm de largura e 30 cm de comprimento são retirados quadrados de lados “ x ” nos quatro cantos. A caixa é, então, dobrada.



É possível observar que a caixa não teria nenhuma capacidade volumétrica se o valor de “ x ” for zero ou dez.

A equação que define a variação do volume dessa caixa em função do valor do lado “ x ” dos quadrados retirados é:

- A) $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$
- B) $V(x) = 2x^3 - 200x^2 + 300x$
- C) $V(x) = 4x^3 + 100x^2 - 600x$
- D) $V(x) = 2x^3 + 200x^2 - 300x$
- E) Nenhuma das alternativas anteriores.

QUESTÃO 07

Numa piscina contendo bolinhas vermelhas e brancas, apenas 20% das bolinhas são vermelhas. Por questões estéticas, deseja-se acrescentar apenas bolinhas vermelhas na piscina, de modo que a quantidade de bolinhas de cada cor fique igual. Com relação ao total inicial de bolinhas vermelhas, que porcentagem de bolinhas deve ser acrescentada na piscina para que se consiga esse feito?

- A) 30%
- B) 60%
- C) 75%
- D) 300%
- E) 400%

QUESTÃO 08

Seja n um número natural e $*$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, fornece a diferença entre o seu inverso e o inverso do seu sucessor.

Por exemplo, $*(6) = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Se aplicarmos esse operador a todos os números naturais de 1 a 2018 e os somarmos, que resultado obteremos?

A) $-\frac{1}{2019}$

B) $\frac{1}{2018}$

C) $\frac{2017}{2018}$

D) $\frac{2018}{2019}$

E) 1

QUESTÃO 09

Precisa-se plantar grama em uma praça com o formato de uma coroa circular, conforme a figura ao lado.

Sabe-se que as distâncias são $AC = 30$ metros e $BC = 40$ metros. Podemos então afirmar que a área que compreenderá a grama na praça é:

(Use $\pi = 3,14$)

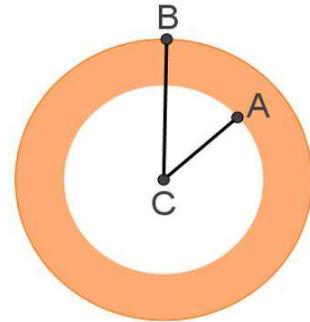
A) 314 m^2

B) 2198 m^2

C) 2826 m^2

D) 5024 m^2

E) 7850 m^2



QUESTÃO 10

Dispõe-se das cores azul, verde e amarelo para pintar uma bandeira, conforme a figura.

Esta pintura deve ser de tal modo que cada uma das quatro partes não tenha duas partes vizinhas com a mesma cor. Então a quantidade de formas distintas de pintar tal bandeira é:

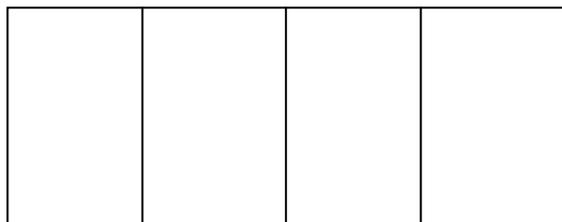
A) 81

B) 27

C) 24

D) 12

E) 9



QUESTÃO 11

Um exemplo de modelagem matemática na biologia, muito importante no meio acadêmico, é a Teoria de Malthus. Thomas Malthus, em 1678, propôs um crescimento populacional de forma exponencial, estabelecendo que a taxa de variação da população, em relação ao tempo, é proporcional à população presente. Essa formulação não descreve muitos tipos de populações, porém serve como um possível modelo para o crescimento de bactérias. Se resolvermos em termos matemáticos as palavras de Malthus teremos a seguinte fórmula:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

sendo que $N(t)$ é a quantidade de bactérias em um determinado tempo t em horas, N_0 é a quantidade inicial de bactérias, o número e é a constante de neper que é aproximadamente 3 e o número a é a constante de proporcionalidade que terá o valor 4.

Desse modo, suponha que tenhamos uma população de bactérias quantificada inicialmente em 1000 indivíduos segundo a fórmula de Malthus. Quanto tempo será necessário para que essa população alcance a quantidade de 16000 indivíduos? (Utilize $\log(2) = 0,3$ e $\log(3) = 0,4$).

- A) 30 minutos.
- B) 45 minutos.
- C) 1 hora.
- D) 1 hora e 15 minutos.
- E) 2 horas.

QUESTÃO 12

A densidade é uma propriedade física que relaciona a massa e o volume de um corpo, ou seja, é determinada pela expressão $d = \frac{m}{V}$, onde d é a densidade, m é a massa e V é o volume do corpo. O peso é uma força que relaciona a massa de um corpo com a gravidade local, através da relação $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, onde P é o peso (em Newtons), m é a massa e g é a gravidade local.

Considere os cinco recipientes de mesma massa (10 kg) contendo líquidos diferentes. Sabendo que todos eles se localizam no planeta Terra ($g = 10 \text{ m/s}^2$), assinale a alternativa que apresente o conjunto (recipiente mais líquido) de maior peso em Newtons. (Considere $\pi = 3$)

- A) Cubo (0,5 m de lado) preenchido com água ($d = 1000 \text{ kg/m}^3$).
- B) Paralelepípedo (dimensões 0,6m x 0,5m x 0,4m) preenchido com óleo ($d = 900 \text{ kg/m}^3$).
- C) Cilindro (0,6 m de raio da base e 0,2 m de altura) preenchido com gasolina ($d = 720 \text{ kg/m}^3$).
- D) Esfera (0,3 m de raio) preenchida com etanol ($d = 790 \text{ kg/m}^3$).
- E) Semiesfera (0,4 m de raio) preenchido com acetona ($d = 780 \text{ kg/m}^3$)

QUESTÃO 13

As ondas eletromagnéticas estão presentes em muitas situações do nosso dia-a-dia, pode ser em uma simples caminhada ao ar livre durante o dia, como também em uma ligação através de um aparelho celular. A tabela 1 mostra a energia, em elétron-volt (eV), para cada um dos tipos de ondas eletromagnéticas. Já a tabela 2 apresenta os prefixos associados às ordens de grandeza.

Tipo de onda	Energia (eV)
Rádio	$< 1 \times 10^{-5}$
Micro-ondas	1×10^{-5} até 0,01
Infravermelho	0,01 até 2
Visível	2 até 3
Ultravioleta	3 até 1×10^3
Raio – X	1×10^3 até 1×10^5
Raio Gama	$> 1 \times 10^5$

Tabela 1

Prefixo	Valor
Giga (G)	10^9
Mega (M)	10^6
Quilo (k)	10^3
Mili (m)	10^{-3}
Micro (μ)	10^{-6}
Nano (n)	10^{-9}

Tabela 2

Assinale a alternativa que contenha níveis de energia de ondas de rádio e ondas de raio gama, respectivamente.

- A) 0,01 μ eV e 0,01 MeV
- B) 30 neV e 30 keV
- C) 10 meV e 10 keV
- D) 0,002 meV e 0,002 GeV
- E) 1 μ eV e 1 keV

QUESTÃO 14

Carlos, cliente do Banco “Sulminas”, necessitou resgatar imediatamente o valor total de suas duas aplicações financeiras de R\$ 2.000,00, a primeira que venceria em 60 dias e a segunda em 90 dias. O gerente do banco ofereceu uma taxa de juros para antecipação do resgate com aplicação de um desconto de 2% ao mês na modalidade de juros simples. Entretanto, o cliente fez uma contraproposta ao gerente pedindo a mesma aplicação do desconto, mas com juros compostos. Considerando que o banco pretende aceitar a opção de menor custo para o cliente, podemos concluir que:

- A) o banco não aceitou a proposta do cliente e este receberá R\$ 3.800,00 pelo resgate.
- B) o banco aceitou a proposta do cliente e este receberá aproximadamente R\$ 3.803,18 pelo resgate.
- C) o banco não aceitou a proposta do cliente e este receberá R\$ 4.200,00 pelo resgate.
- D) o banco aceitou a proposta do cliente e este receberá aproximadamente R\$ 4.203,22 pelo resgate.
- E) o banco aceitou a proposta do cliente e este receberá aproximadamente R\$ 4.200,00 pelo resgate.