I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS

RESOLUÇÃO DA PROVA - 1° FASE

QUESTÃO 01 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA A

Segundo as informações, Neymar tem 9 anos de vida profissional $(2017 - 2009 + 1 = 9)$.

Assim, a média anual dele é: $\frac{311}{9} = 34{,}55$ *gols.*

Ainda segundo informações, Pelé fez 1286 gols. Para saber quantos anos seriam necessários para atingir a mesma quantidade de gols basta fazer: $\frac{1286}{34{,}55} = 37{,}22$ *anos.*

Como Neymar começou a jogar profissionalmente a partir dos 17 anos, ele conseguirá atingir, se mantiver a mesma média, a marca de Pelé em $17 + 37{,}22 = 54{,}22$ *anos, ou seja, ele precisará jogar no máximo até os 55 anos para se igualar a Pelé.*

QUESTÃO 02 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA B

O problema consiste em calcular a superfície ou área total de cada um dos seguintes sólidos:

- *O cubo:* $A = 6.4^2 = 6.16 = 96\ cm^2$
- *O prisma triangular:* $A = 3.3.5 + 2.\frac{3^2.\sqrt{3}}{4} = 45 + \frac{9.1{,}7}{2} = 45 + 7{,}65 = 52{,}65\ cm^2$
- *O cilindro:* $A = 2.3.2^2 + 2.3.2.6 = 24 + 72 = 96\ cm^2$

Dessa forma, tem-se que a área do prisma triangular tem o menor custo.

QUESTÃO 03 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

Para determinar os valores das letras O, M, I *e* F, *segue o seguinte raciocínio: inicialmente, para determinar* F, *observa-se que* 9, *menos um número* F, *resulta em* 1, *logo* $F = 8$; *depois, para calcular* I, *observa-se que* 1 *menos* I *tem resultado* 4, *assim, o* 1 *deverá ser acrescido de uma dezena e se tem que* $11 - I = 4$, *logo* $I = 7$; *segue imediatamente que* $M = 9$, *pois* $9 - 8 = 1$, *porém, para acrescentar uma dezena ao número* 1, *feito anteriormente, foi necessário suprimir* *uma unidade do número M, então M não poderá ser 9, mas deverá ser $9 + 1 = 10$. Então, para que isso ocorra, é necessário que seja $M = 0$; da mesma forma, $O - 1 = 4$, implica que $O = 5$, mas como foi preciso retirar uma unidade do número O para acrescentar uma dezena a M, tem-se que O deve ser $O = 5 + 1 = 6$. Portanto, $O = 6$, $M = 0$, $I = 7$ e $F = 8$.*

QUESTÃO 04 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

O problema consiste em calcular o anagrama da palavra OMIF, com a restrição que as vogais apareçam juntas. Desse modo, para o cálculo deve-se considerar as vogais OI como apenas uma letra e pelo princípio multiplicativo tem-se $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Mas também, as vogais OI também poderão estar dispostas como IO, então se deve multiplicar por 2 o resultado anterior. Portanto, a quantidade de anagramas possíveis são $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2 = 12$.

QUESTÃO 05 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

A distância de Araguatins-TO até Imperatriz-MA é representada pelo número $0{,}0\overline{4}$, que representa uma dízima periódica. Transformando essa dízima periódica em fração geratriz, tem-se: $N = 0{,}0444\ldots \Rightarrow 10N = 0{,}444\ldots \Rightarrow 10N = \frac{4}{9} \Rightarrow N = \frac{4}{90} \Rightarrow N = \frac{2}{45}$

Assim, somando-se as distâncias de Araguatins-TO até Imperatriz-MA e de Belo Horizonte-MG até Muzambinho-MG fica $\frac{2}{45} + \frac{7}{36} = \frac{(8+35)}{180} = \frac{43}{180}$.

Então, como a soma anterior é uma fração do trajeto todo, pode-se afirmar que:

$\left(\frac{43}{180}\right) x = 516 \rightarrow 43x = 92880 \rightarrow x = 2160.$

Portanto, a distância entre Araguatins-TO e Muzambinho-MG é de 2160 km.

QUESTÃO 06 - RESOLUÇÃO

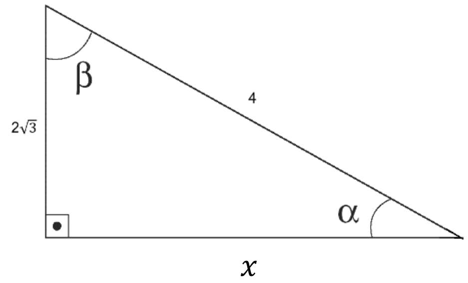
ALTERNATIVA D

Pelo princípio fundamental da contagem, tem-se: $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$. Portanto, para ir da cidade de Araguatins-TO para a cidade de Muzambinho-MG, passando obrigatoriamente por Imperatriz-MA e Belo Horizonte-MG nessa ordem, existem 72 trajetos distintos possíveis.

QUESTÃO 07 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

O triângulo retângulo a seguir descreve a situação descrita:



Através do teorema de Pitágoras, pode-se calcular o outro cateto:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

$$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2$$

$$16 = 12 + x^2$$

$$x^2 = 16 - 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = 2$$

Portanto, o outro cateto do triângulo mede 2 metros.

E o ângulo oposto ao lado que mede $2\sqrt{3}$ *é calculado utilizando o seno do ângulo* α*:*

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Se\ sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ logo\ \alpha = 60°.$$

QUESTÃO 08 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Seguindo a condição de existência de um triângulo que afirma que um lado não pode ser maior que a soma dos outros dois lados e que o quadrado do maior lado deve superar a soma dos quadrados dos dois menores, tem-se que a única reposta que satisfaz é 7 *metros, pois* $7 < 4 + 5$ *e* $7^2 > 5^2 + 4^2 \Rightarrow 49 > 41$.

QUESTÃO 09 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Sejam M e F a quantidade de alunos do sexo masculino e feminino neste campus em 2017, respectivamente. Em 2018, a quantidade de alunos do sexo masculino é igual a $1{,}05 \cdot M$*, a* *quantidade de alunos do sexo feminino é igual a* $1{,}25 \cdot F$ *e a quantidade total de alunos do campus é* $1{,}13 \cdot (M + F)$. *Assim, tem-se que:*

$$1{,}05 \cdot M + 1{,}25 \cdot F = 1{,}13 \cdot (M + F)$$

$$1{,}05 \cdot M + 1{,}25 \cdot F = 1{,}13 \cdot M + 1{,}13 \cdot F$$

$$0{,}12 \cdot F = 0{,}08 \cdot M$$

$$12 \cdot F = 8 \cdot M$$

$$M = 1{,}5 \cdot F$$

Logo, o percentual de alunos do sexo feminino neste campus, em 2017, é

$$\frac{F}{M+F} = \frac{F}{1{,}5 \cdot F + F} = \frac{F}{2{,}5 \cdot F} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$$

QUESTÃO 10 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

Considerando que o excesso do produto de dois números é igual ao excesso do produto dos excessos dos dois números, pode-se calcular o excesso dos fatores 123454321 *e* 90817263541, *separadamente e, depois, tirar os 9 fora de cada um.*

Assim, somando os algarismos de cada fator tem-se: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$, *e quando divide* 25 *por* 9 *obtém-se resto* 7. *Logo,* 7 *é o excesso de* 123454321.

Do mesmo modo, com o outro fator fica: $9 + 0 + 8 + 1 + 7 + 2 + 6 + 3 + 5 + 4 + 1 = 46$, *e quando divide 46 por 9 obtém-se resto* 1. *Logo,* 1 *é o excesso de* 90817263541.

O produto dos excessos desses dois números é $7 \cdot 1 = 7$. *Calculando o resto da divisão de* 7 *por* 9, *encontra-se* 7. *Portanto,* 7 *é o excesso procurado.*

QUESTÃO 11 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Como duas questões de Função Quadrática não podem aparecer consecutivamente, a primeira etapa da resolução do problema consiste em garantir que isso aconteça. Usando A como símbolo para as questões de Função Afim, pode-se concluir que a prova deverá apresentar o seguinte esquema:

$$\_\_\_ \ A \ \_\_\_ \ A \ \_\_\_ \ A \ \_\_\_ \ A \ \_\_\_ \ A \ \_\_\_$$

no qual o professor deverá escolher 3 dos 6 lugares "vazios" para colocar uma questão de Função Quadrática. Esta escolha pode ser feita de $C_{6,3}$ *maneiras.*

Feito isso, as 5 questões de Função Afim podem ser permutadas entre si, bem como as 3 questões de Função Quadrática. Portanto, o número de ordenações diferentes que o professor pode fazer para sua prova é:

$$C_{6,3} \cdot P_5 \cdot P_3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot 5! \cdot 3! = 20 \cdot 120 \cdot 6 = 14400$$

QUESTÃO 12 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA B

Pelas informações, pode-se afirmar que $sen2°$ *difere do* $sen0°$ *por menos de* 4 *centésimos, ou seja,* $sen2° < sen0° + 0{,}04 = 0{,}04$.

Além disso, o seguinte é válido: sen $20° = -sen(20° + 180°) = -sen(200°)$.

Tem-se também que $sen(201°) > sen(200°) - 0{,}02$.

Sabe-se que $sen(2018°) = sen(5 \cdot 360° + 218°) = sen(218°) = -sen(38°) = -0{,}62$.

Portanto,

$sen2° + sen20° + sen201° + sen2018 \approx 0{,}04 - sen(200°) + sen(200°) - 0{,}02 - 0{,}62 = -0{,}6$

e o valor está entre -1 *e* $-0{,}5$.

QUESTÃO 13 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

Para calcular o volume do muro utiliza-se o produto das três dimensões:

$$V = h \cdot c \cdot e$$

$$V = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}4$$

$$V = 8\ m^3$$

Como as informações relativas ao cimento são desprezíveis, o volume do muro é equivalente ao volume dos tijolos necessários para a construção. Através do volume e da densidade do tijolo determina-se a massa de tijolo (ainda não considerando o desperdício):

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V$$

$$m = 2000 \cdot 8$$

$$m = 16000\ kg$$

Como há desperdício, é necessário utilizar 10% *mais tijolos do que o calculado anteriormente, ou seja, a massa total de tijolo é:*

$$m_f = 110\% \cdot m$$

$$m_f = 110\% \cdot 16\ 000$$

$$m_f = 17600\ kg$$

Os tijolos serão transportados em carriolas com capacidade de 150 *kg, pode-se calcular o número de "viagens" dividindo os* 17600 *kg em quantidades iguais a* 150 *kg:*

$$n = \frac{m_f}{capacidade\ da\ carriola}$$

$$n = \frac{17600}{150}$$

$$n = 117{,}333 \ldots$$

Como o número de "viagens" é representado por um número natural, então o menor número de "viagens" possível é 118.

QUESTÃO 14 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Fatorando o número 80640, *tem-se* $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. *Para se obter os divisores ímpares, é necessário excluir o fator* 2, *ou seja, os divisores ímpares devem ser da forma* $3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, *com o número* a *podendo ser* 0, 1 *ou* 2 *e os números* b *e* c *podendo ser* 0 *ou* 1. *Logo, o total de divisores ímpares é* $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

QUESTÃO 15 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Os clientes preferenciais tem $3!$ *formas de serem posicionados. Os outros* 2 *clientes podem ser posicionados de* 2 *formas diferentes. Desse modo, a fila tem* $3! \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ *formas de ser organizada e uma delas é a forma original, em outras palavras, uma forma em* 12 *ou* $\frac{1}{12}$.

QUESTÃO 16 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

Note que ao escrever todos os números de 1 *a* 99, *todos os algarismos, com exceção do* 0, *aparecerão por* 20 *vezes, isto é,* 10 *vezes como algarismo das unidades e* 10 *vezes como algarismo da dezena. Logo, quando João escrever seguidamente todos os números de* 1 *a* 100, *ele obterá um número cuja soma dos algarismos é:*

$$20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + \cdots + 20 \cdot 9 + (1 + 0 + 0) = 20 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) + 1 =$$
$$= 20 \cdot 45 + 1 = 901$$

QUESTÃO 17 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Aplica-se o operador ao número 2018 *e continua aplicando aos seus resultados até que se perceba algum tipo de padrão:*

Número de aplicações do operador	***Resultado***
1	$\otimes(2018) = (2+0+1+8)^2 = 121$
2	$\otimes(121) = (1+2+1)^2 = 16$
3	$\otimes(16) = (1+6)^2 = 49$
4	$\otimes(49) = (4+9)^2 = 169$
5	$\otimes(169) = (1+6+9)^2 = 256$
6	$\otimes(256) = (2+5+6)^2 = 169$
7	$\otimes(169) = (1+6+9)^2 = 256$

Observe que a partir da quarta aplicação do operador, quando o número de aplicações for par, o resultado será 169 *e, quando o número de aplicações for ímpar, o resultado será* 256. *Assim, se aplicar o operador por* 2018 *vezes, que é um número par, obtém-se o número* 169.

QUESTÃO 18 - ANULADA

QUESTÃO 19 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Segundo as informações do problema, pode-se afirmar que:

Magnitude: $M = 6{,}4$

Dados: $10^{0{,}40} \approx 2{,}5$

Sendo assim:

$$M = 0{,}67log(E) - 3{,}25$$

Substituindo o valor da magnitude, tem-se:

$$6{,}4 = 0{,}67log(E) - 3{,}25$$

$$0{,}67log(E) = 6{,}4 + 3{,}25$$

$$0{,}67log(E) = 9{,}65$$

$$log(E) = 9{,}65 \div 0{,}67$$

$$log(E) = 14{,}40$$

Aplicando a definição do logaritmo:

$$E = 10^{14{,}40}$$

$$E = 10^{0{,}40} \cdot 10^{14}$$

Utilizando os dados: $10^{0{,}40} \approx 2{,}5$ *obtém-se que:*

$$E = 2{,}5 \cdot 10^{14}\ J$$

QUESTÃO 20 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA E

Seja M *a massa total da camiseta com água, logo após ela sair da lavadora. Tem-se que* $0{,}6M$ *é a massa de água e que* $0{,}4M$ *é a massa da própria camiseta.*

Por outro lado, seja m *a massa total da camiseta com água, depois de uma hora no varal. Tem-se que* $0{,}2m$ *é a massa de água e que* $0{,}8m$ *é a massa da própria camiseta.*

Como a massa da camiseta não muda com a secagem, tem-se que:

$$0{,}4 \cdot M = 0{,}8 \cdot m$$

$$M = 2 \cdot m$$

Assim, logo após ser lavada, a massa de água é igual $0{,}6M = 0{,}6 \cdot 2m = 1{,}2m$ *e, portanto, a massa de água evaporada é igual a*

$$1{,}2m - 0{,}2m = m$$

Por isso, o percentual de água que evaporou da camiseta de João no varal é igual a

$$\frac{m}{1{,}2m} = \frac{1}{1{,}2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \cong 83\%$$

QUESTÃO 21 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Chamando de x o número pensado por Natainá, a informação 1 diz que:

$x - 4 = 14m + 1$, *para algum* $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 14m + 5$

$\Rightarrow x = 7 \cdot (2m) + 5$

$\Rightarrow x$ *deixa resto igual a* 5 *na divisão por* 7.

Logo, a informação 1 sozinha é o suficiente para responder à pergunta.

Já a informação 2 nos diz que:

$3x + 6 = 21n$, *para algum* $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3x = 21n - 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{21n - 6}{3}$

$\Rightarrow x = 7n - 2$

$\Rightarrow x = 7(n - 1) + 5$

$\Rightarrow x$ *deixa resto igual a* 5 *na divisão por* 7.

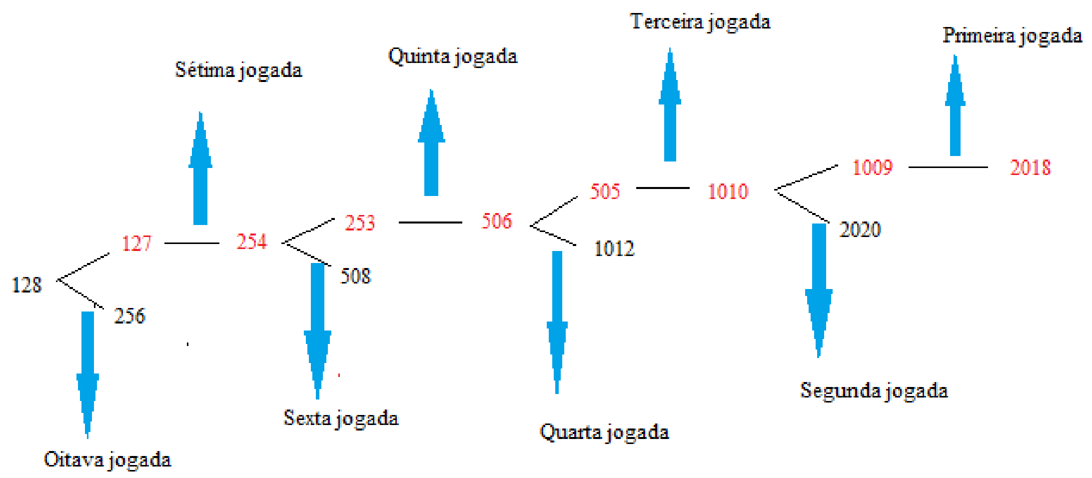
Logo, a informação 2 sozinha é o suficiente para responder à pergunta.

Portanto, tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

QUESTÃO 22 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Fazendo as operações inversas: subtrai-se 1 ou multiplica-se por 2 se o número for par e multiplica-se por 2 se for ímpar. Deve-se subtrair 1 o maior número de vezes e multiplicar por 2 o menor número de vezes, a fim de se obter o menor número inicial. Portanto, conforme o diagrama a seguir, tem-se: 128, 127, 254, 253, 506, 505, 1010, 1009, 2018.



QUESTÃO 23 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Primeiramente, calcula-se o volume da pizza pequena:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3 \cdot 25^2 \cdot 1 = 1875\ cm^3$

Sabendo da densidade e volume da pizza pequena, calcula-se a massa da mesma:

$m = d \cdot V = 0{,}096 \cdot 1875 = 180\ g$

Depois, calcula-se o volume das 4 fatias da pizza média (sabendo que a pizza completa tem 6 fatias):

$V = \frac{4}{6} \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot h) = \frac{4}{6} \cdot [(3 \cdot 30^2 \cdot 1)] = 1800\ cm^3$

Sabendo da densidade e volume das 4 fatias da pizza média, calcula-se a massa das mesmas:

$m = 0{,}096 \cdot 1800 = 172{,}8\ g$

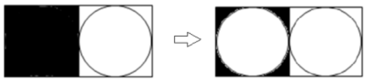
Logo, percebe-se que a pizza pequena tem mais massa que a pizza média e a diferença é dada por: $180 - 172{,}8 = 7{,}2\ g$

Portanto, a oferta não é vantajosa, pois as 4 fatias oferecidas tem $7{,}2\ g$ *a menos que a pizza pequena.*

QUESTÃO 24 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA A

Calculando a área de uma circunferência, tem-se que: $C = \pi \cdot r^2 \Rightarrow C = \pi . 1^2 \Rightarrow C = \pi\ km^2$. *A área do quadrado que circunscreve essa circunferência é* $A = 2^2 \Rightarrow A = 4\ km^2$. *Desse modo, ao subtrair a circunferência do quadrado, obtém-se:* $A - C = (4 - \pi) km^2$, *que pode ser observado na imagem a seguir:*

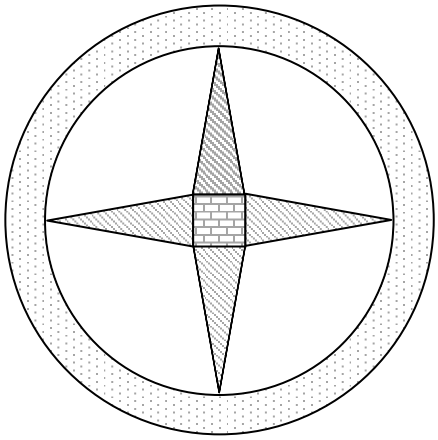


No entanto, $A - C$ representa o dobro da área desejada, assim, concluí-se que a área urbana sem cobertura é $\left(\frac{4-\pi}{2}\right) km^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) km^2$.

QUESTÃO 25 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Primeiramente, dividi-se a área pedida em 3 partes como segue abaixo:



A_1 = área da coroa circular

A_2 = área dos 4 triângulos isósceles

A_3 = área do quadrado central

Calculando a área 1:

$$A_1 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

$$A_1 = \pi \cdot (6^2 - 5^2)$$

$$A_1 = \pi \cdot (36 - 25)$$

$$A_1 = 11\pi\, cm^2$$

Para calcular a área 2, observa-se que o raio do círculo central é igual a $\sqrt{2}$ e tem-se que o lado do quadrado central pode ser calculado aplicando a diagonal igual ao diâmetro:

$$d = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$l = 2\ cm$$

E a altura dos triângulos isósceles pode ser calculada pela diferença entre o raio da circunferência interna da coroa e a metade do lado do quadrado central:

$$h = r - \frac{l}{2}$$

$$h = 5 - \frac{2}{2}$$

$$h = 4\ cm$$

Com esses dados é possível calcular a área 2:

$$A_2 = 4\,.\,\frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_2 = 4\,.\,\frac{2 \cdot 4}{2}$$

$$A_2 = 16\ cm^2$$

E, por fim, calcula-se a área 3:

$$A_3 = l^2$$

$$A_3 = 2^2$$

$$A_3 = 4\ cm^2$$

Portanto, a área total da figura é:

$$Área = A_1 + A_2 + A_3$$

$$Área = (11\pi + 20)\ cm^2$$

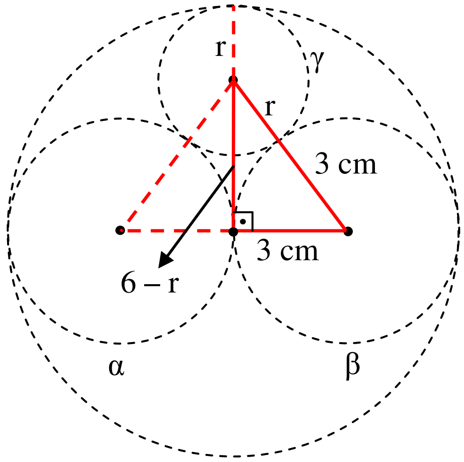
QUESTÃO 26 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA C

Como a área da circunferência maior é igual a $36\pi\ \text{cm}^2$*, sendo R o comprimento do seu raio, tem-se:*

$$\pi \cdot R^2 = 36 \cdot \pi \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow \boxed{R = 6\ \text{cm}}$$

Assim, os diâmetros das circunferências α e β medem 6 cm e, portanto, seus raios medem 3 cm. Observa-se a figura a seguir, onde r *representa o comprimento do raio da circunferência menor.*



No triângulo retângulo destacado, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras para descobrir o valor de r. *Tem-se que:*

$$(r+3)^2 = 3^2 + (6-r)^2$$
$$\cancel{r^2} + 6r + \cancel{9} = \cancel{9} + 36 - 12r + \cancel{r^2}$$
$$18r = 36$$
$$\boxed{r = 2 \text{ cm}}$$

Logo, a área da circunferência menor é:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2$$
$$\boxed{A = 4\pi \text{ cm}^2}$$

QUESTÃO 27 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA B

Para determinar a alternativa que contém uma frequência de luz visível, será preciso seguir os seguintes passos:

1 – Determinar o intervalo de comprimento de onda da luz visível:

Entre $400\ nm$ *e* $500\ nm$ *há* 5 *espaços, ou seja,* $\frac{100\ nm}{5} = 20\ nm$, *sendo cada espaço com valor de* $20\ nm$.

O espectro, então, começa em $380\ nm$ $(400 - 20)$ *e termina em* $740\ nm$ $(700 + 20 + 20)$

$380\ nm$ -------------------- $740\ nm$

$380 \times 10^{-9}\ m$ ------------ $740 \times 10^{-9}\ m$

$3{,}8 \times 10^{-7}\ m$ ------------- $7{,}4 \times 10^{-7}\ m$

2 – Determinar a frequência para os limites do intervalo de comprimento de onda:

→ *para* $\lambda = 3{,}8 \times 10^{-7}$ *m tem-se que:* $f = \frac{3\ x\ 10^8}{3{,}8\ x\ 10^{-7}} = 0{,}79 \times 10^{15} = 7{,}9 \times 10^{14}\ Hz$

→ *para* $\lambda = 7{,}4 \times 10^{-7}$ *m tem-se que:* $f = \frac{3\ x\ 10^8}{7{,}4\ x\ 10^{-7}} = 0{,}40 \times 10^{15} = 4{,}0 \times 10^{14}\ Hz$

Ou seja, o intervalo de frequência para a luz visível vai de $4{,}0 \times 10^{14}\ \ Hz$ *até* $7{,}9 \times 10^{14}\ Hz$.

3 – Analisar as alternativas:

A) $M = 10^6$, *logo* $9 \times 10^8 \times 10^6\ Hz = 9 \times 10^{14}\ Hz$, *que está acima de* $7{,}9 \times 10^{14}\ Hz$.

B) $G = 10^9$, *logo* $5 \times 10^5 \times 10^9\ Hz = 5 \times 10^{14}\ Hz$, *que está entre* $4{,}0 \times 10^{14}\ Hz$ *e* $7{,}9 \times 10^{14}\ Hz$, *portanto é a alternativa correta.*

C) $T = 10^{12}$, *logo* $3 \times 10^2 \times 10^{12}\ Hz = 3 \times 10^{14}\ Hz$, *que está abaixo de* $4{,}0 \times 10^{14}\ \ Hz$.

D) $M = 10^6$, *logo* $6 \times 10^7 \times 10^6\ Hz = 6 \times 10^{13}\ Hz$, *que está abaixo de* $4{,}0 \times 10^{14}\ \ Hz$.

E) $200\ Hz$ *está abaixo de* $4{,}0 \times 10^{14}\ \ Hz$.

QUESTÃO 28 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA D

Sabe-se que o valor da aposentadoria A é o produto entre a média das contribuições Mc *e o fator previdenciário* F, *ou seja:* $A = Mc \times F$.

Sabe-se também que a expectativa de sobrevida errada, que será denotada por $Es\ errada$, *é* 25% *maior que a expectativa de sobrevida real, denotada por* $Es\ real$, *ou seja;*

$$Es\ errada = 1{,}25\ Es\ real.$$

Logo, o cálculo da aposentaria errado, que será denotada por $A\ errada$, *e o cálculo correto, denotada por* $A\ real$, *são respectivamente:*

$$A\ errada = Mc\ \times \frac{Tc \times a}{Es\ errada} \times \left[1 + \frac{(Id + Tc \times a)}{100}\right] =$$

$$= Mc \times \frac{Tc \times a}{1{,}25 Es\ real} \times \left[1 + \frac{(Id + Tc \times a)}{100}\right]$$

$$A\ real = MC \times \frac{Tc \times a}{Es\ real} \times \left[1 + \frac{(Id + Tc \times a)}{100}\right].$$

Note que,

$$A\ errada = \frac{1}{1{,}25} \times MC \times \frac{Tc\ x\ a}{Es\ real} \times \left[1 + \frac{(Id + Tc \times a)}{100}\right] = \frac{1}{1{,}25}\ A\ real.$$

Assim, chega-se a:

$$A\,real = 1{,}25\,A\,errada.$$

Portanto, precisa-se reajustar em 25% *o valor da aposentadoria.*

QUESTÃO 29 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA B

Primeiramente, determina-se a expressão da função $f(x)$. *É fácil notar que, para todo* $x < 0$, *tem-se* $f(x) = 4$. *Agora, para* $x \geq 0$, *como* f *é linear, sabe-se que sua expressão deve ser da forma* $f(x) = ax + b$, *para algum* a *e* b. *Como* $f(0) = 4$ *e* $f(2) = 0$, *tem-se:*

$$f(0) = 4 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow a \cdot 2 = -4 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Desta maneira, a expressão da função f *é dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 4 & ,\ se\ x < 0 \\ -2x + 4 & ,\ se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, tem-se que:

$$f(12) = -2 \cdot 12 + 4 = -20$$

$$F_2(12) = f\big(f(12)\big) = f(-20) = 4 \Rightarrow \boxed{F_2(12) = 4}$$

$$F_3(12) = f\Big(f\big(f(12)\big)\Big) = f\big(F_2(12)\big) = f(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -4 \Rightarrow \boxed{F_3(12) = -4}$$

$$F_4(12) = f\bigg(f\Big(f\big(f(12)\big)\Big)\bigg) = f\big(F_3(12)\big) = f(-4) = 4 \Rightarrow \boxed{F_4(12) = 4}$$

$$F_5(12) = f\Bigg(f\bigg(f\Big(f\big(f(12)\big)\Big)\bigg)\Bigg) = f\big(F_4(12)\big) = f(4) = -4 \Rightarrow \boxed{F_5(12) = -4}$$

Note que se obteve um padrão. Tem-se que

$$F_i(12) = \begin{cases} 4 & ,\ se\ i\ for\ par \\ -4 & ,\ se\ i\ for\ ímpar \end{cases}$$

Logo,

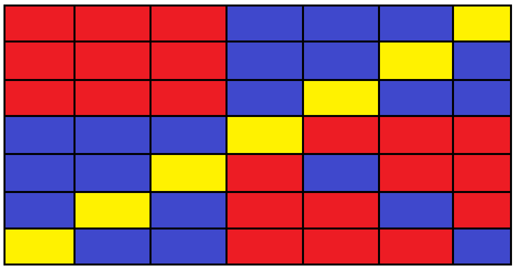
$$\boxed{F_{1009}(12) = -4}$$

QUESTÃO 30 - RESOLUÇÃO

ALTERNATIVA A

Como há três cores para 7 *filas e em cada linha o número de casas vermelhas não pode ser menor do que de azuis e amarelas, conclui-se que há pelo menos 3 casas vermelhas. Assim, como o tabuleiro tem* 7 *linhas, tem-se pelo menos* $7 \cdot 3 = 21$ *casas vermelhas. Analogamente, tem-se pelo menos* 21 *casas azuis. Agora, nota-se que não pode haver* 22 *casas vermelhas, pois, assim, teriam* $22 = 7 \cdot 3 + 1$*, ou seja, em uma coluna teriam* 4 *casas vermelhas e a quantidade de casas azuis seria menor do que vermelhas nessa coluna. Logo, deve-se ter exatamente* 21 *casas vermelhas e exatamente* 21 *casas azuis. Portanto, tem-se* $21 + 21 = 42$ *casas vermelhas e azuis, e* $49 - 42 = 7$ *casas amarelas.*

Uma possível solução seria:



Sendo que nas soluções possíveis, as casas amarelas devem ser preenchidas nas diagonais (principal ou secundária).