



OLIMPÍADA DE
MATEMÁTICA DOS
INSTITUTOS FEDERAIS

II OMIF – 2019 – RESOLUÇÃO DA PROVA

QUESTÃO 01 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como 3μ tem que ter valor terminado em μ , então $\mu = 0$ ou $\mu = 5$.

Contudo, μ não pode ser zero, pois, se fosse, todos os algarismos teriam que ser zero. Então, $\mu = 5$.

Assim, $3\mu = 15$, e, conseqüentemente, $1 + 3\beta$ tem que terminar com 5. Para tanto, 3β tem que ter valor terminado em 4, o que sugere que seja um múltiplo de 3 que termine com a unidade 4, logo $\beta = 8$.

Por último, $2 + 3\alpha$ tem que dar 5, o que implica que 3α tem que ter valor 3, logo $\alpha = 1$.

Portanto, $\alpha + \beta + \mu = 5 + 8 + 1 = 14$.

QUESTÃO 02 – GABARITO: A

RESOLUÇÃO:

Denotando os segmentos $\overline{OP} = x$, $\overline{PQ} = y$ e $\overline{QR} = z$

Como os segmentos \overline{OP} , \overline{PQ} e \overline{QR} são transversais aos segmentos paralelos \overline{AO} , \overline{BP} , \overline{CQ} e \overline{DR} , podemos afirmar, pelo Teorema de Tales, que

$$\frac{(40 + 30 + 20)}{120} = \frac{40}{x} = \frac{30}{y} = \frac{20}{z}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{40}{x} = \frac{30}{y} = \frac{20}{z}$$

$$x = \frac{160}{3} m, y = 40 m \text{ e } z = \frac{80}{3} m$$

QUESTÃO 03 – GABARITO: D**RESOLUÇÃO:**

Podemos observar que “quarenta e oito” tem 13 letras, “quarenta e nove” tem 13 letras, “cinquenta” tem 9 letras, “cinquenta e um” tem 12 letras e “cinquenta e quatro” tem 16 letras. Dessa forma, como $13 + 13 + 9 + 16 = 51$, a alternativa correta é “cinquenta e um”.

QUESTÃO 04 – GABARITO: C**RESOLUÇÃO:**

O algarismo ocupante da unidade de milhar poderá ser 2 ou 3, pois o número procurado está entre 2000 e 4000. Como o algarismo da unidade de milhar possui uma unidade a menos que o algarismo das dezenas, o valor do algarismo das dezenas só poderá ser 3 ou 4. Como o algarismo das centenas vale o triplo do algarismo das dezenas, o único valor possível seria o $9 = 3 \times 3$, uma vez que $3 \times 4 = 12$ não poderá representar as centenas por apresentar dois algarismos. Desta forma, com os algarismos das centenas sendo 9 e o das dezenas sendo 3, o algarismo da unidade de milhar deverá ser 2, por valer uma unidade a menos que o algarismo das dezenas. Assim, o algarismo da unidade é o valor $8 = 4 \times 2$. Portanto, o número procurado é 2938 e a soma de seus algarismos é $2 + 9 + 3 + 8 = 22$.

QUESTÃO 05 – GABARITO: D**RESOLUÇÃO:**

Se a equação $x^2 + bx + c = 0$ tem como conjunto solução $S = \{\Delta - 1; \Delta + 1\}$ e o coeficiente $a = 1$, então expressando as raízes através da fórmula de Bhaskara ($x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$) obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta + 1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \Delta - 1 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} &= \Delta + 1 - (\Delta - 1) \\ \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2} &= \Delta + 1 - \Delta + 1 \\ \sqrt{\Delta} &= 2 \\ \Delta &= 4 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{\Delta - 1; \Delta + 1\} = \{4 - 1; 4 + 1\} = \{3; 5\}$. E a soma das raízes é $3 + 5 = 8$.

QUESTÃO 06 – GABARITO: C**RESOLUÇÃO:**

Para resolver a questão basta utilizar o conhecimento de ponto médio da geometria analítica. Desta forma, temos:

Coordenadas da torre	
$x_m = \frac{x_A + x_B}{2}$ $x_m = \frac{16 + 12}{2}$ $x_m = 14$	$y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$ $y_m = \frac{35 + 21}{2}$ $y_m = 28$

QUESTÃO 07 – GABARITO: E**RESOLUÇÃO:**

Por inspeção, temos que $111111 = 7 \times 15873$, isto é, 111111 é um múltiplo de 7.

De modo geral, $\underbrace{111 \dots 111}_{6k \text{ dígitos}} = 7 \times 15873 \times (10^{6(k-1)} + \dots + 10^{12} + 10^6 + 1)$ também é um múltiplo de 7.

Portanto, temos que $N = \underbrace{111 \dots 111}_{2019 \text{ dígitos}} = \underbrace{111 \dots 111}_{2016 \text{ dígitos}} \times 10^3 + 111 = 7m + 6$, pois $2016 = 6 \times 336$.

Em outras palavras, $2019 = 6 \times 336 + 3$, isto é, a divisão de 2019 por 6 tem resto 3, o que significa que 2016 dígitos 1 é divisível por 7, sobrando 111 que dividido por 7 tem resto 6.

Logo, o resto da divisão de N por 7 é 6.

QUESTÃO 08 – GABARITO: D**RESOLUÇÃO:**

Sabendo que a taxa de depreciação é de 15% e que o valor pago pelo carro foi de R\$ 45.000,00, podemos escrever a lei de formação do valor do carro em função do tempo, $V(t)$, por:

$$V(t) = 45000 \cdot (1 - 0,15)^t = 45000 \cdot (0,85)^t$$

Como o professor venderá o carro quando a depreciação superar 50% do valor de compra, então

$$V(t) < 22500.$$

Desse modo, a desigualdade fica:

$$45000 \cdot (1 - 0,15)^t < 22500$$

$$0,85^t < \frac{22500}{45000} = \frac{1}{2}$$

$$t \cdot \log_2 0,85 < \log_2 1 - \log_2 2$$

$$t \cdot \log_2 0,85 < \log_2 1 - \log_2 2$$

$$t \cdot (-0,23) < -1$$

$$t > 4,35$$

Logo, o professor venderá o seu carro depois de um tempo compreendido entre 4 e 5 anos.

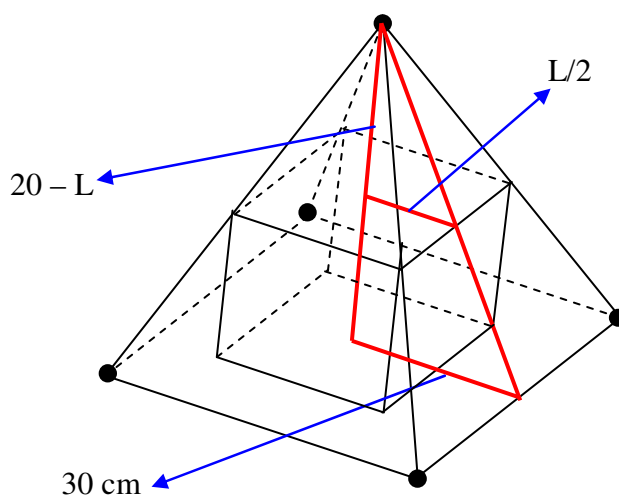
QUESTÃO 09 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como o volume da pirâmide é igual a 24000 cm^3 , sendo h a sua altura, temos que:

$$\frac{1}{3} \cdot 60^2 \cdot h = 24000 \Rightarrow h = 20 \text{ cm}$$

Agora, observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado. Veja que podemos obter dois triângulos semelhantes, destacados na figura.



Temos que:

$$\frac{20}{30} = \frac{20 - L}{\frac{L}{2}} \Rightarrow 10L = 600 - 30L \Rightarrow 40L = 600 \Rightarrow L = 15 \text{ cm}$$

QUESTÃO 10 – GABARITO: C

RESOLUÇÃO:

A questão está relacionada com uma progressão geométrica (P.G.) de razão $\frac{1}{2}$. Pois a sequência obtida pelos espaços percorridos pelo veículo foi: 100 km, 50 km, 25 km, 12,5 km, 6,25 km, 3,125 km, ...

Para determinar a distância percorrida, basta somar os termos da P.G.

Como o primeiro termo é 100, isto é, $a_1 = 100$ e a razão é $q = \frac{1}{2}$, então:

Através da soma de P.G. finita: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, temos

$$S_n = \frac{8 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1},$$

Como o desenvolvimento da potência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ possui numerador 1 e o denominador é um número muito grande, pois n tende a infinito, então, o número decimal obtido será um valor **muito próximo** a zero.

Logo,

$$S_n = \frac{100 \cdot (0 - 1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-100}{-\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200 \text{ km}$$

De outra maneira, considerando a sequência com infinitos termos, podemos usar a soma de P.G. infinita.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = 200 \text{ km}$$

Portanto, o veículo percorrerá 200 km.

QUESTÃO 11 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Denotando respectivamente por a , b , c , d os totais de participantes nas quatro fases temos:

$$\frac{(a + b)}{2} = 2 \cdot (c + d)$$

Somando $2 \cdot (a + b)$ nos dois membros então:

$$\frac{(a + b)}{2} + 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (c + d) + 2 \cdot (a + b)$$

$$\frac{(a + b + 4a + 4b)}{2} = 2 \cdot (a + b + c + d)$$

$$\frac{5(a + b)}{2} = 2 \cdot (a + b + c + d)$$

$$\frac{5(a + b)}{4} = (a + b + c + d)$$

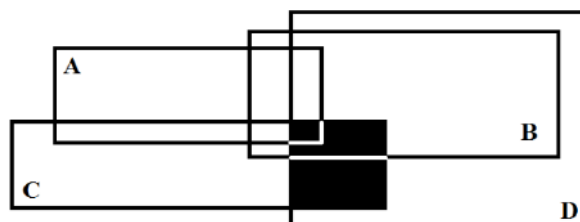
$$\frac{5}{4} = \frac{(a + b + c + d)}{(a + b)}$$

QUESTÃO 12 – GABARITO: D

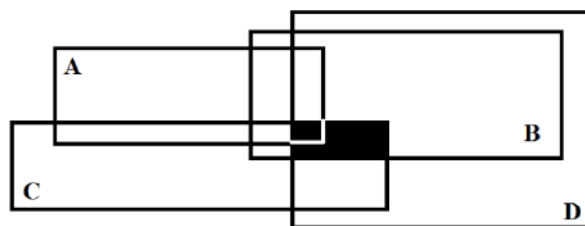
RESOLUÇÃO:

Dividiremos as operações dos conjuntos em partes para facilitar o entendimento:

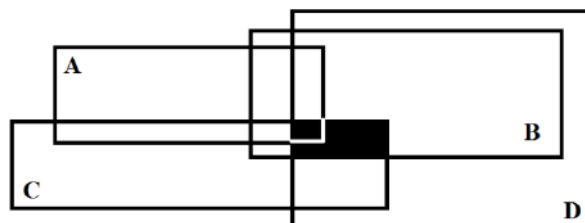
1ª Parte) $C \cap D$



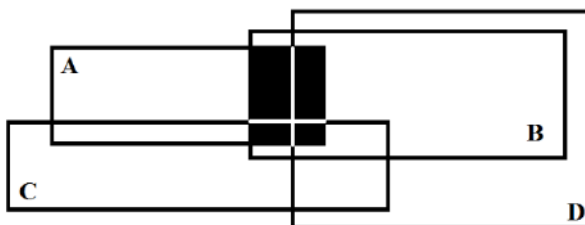
2ª Parte) $C \cap B$



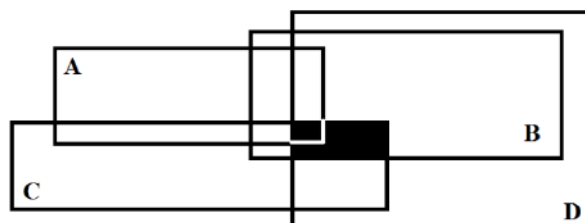
3ª Parte) $(C \cap D) \cap (C \cap B)$



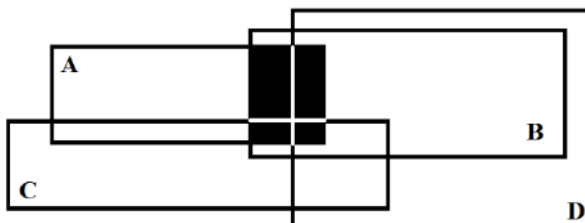
4ª Parte) $A \cap B$



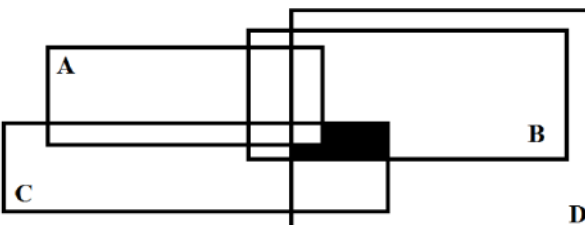
5ª Parte) $[(C \cap D) \cap (C \cap B)] - (A \cap B)$



-



=



QUESTÃO 13 – GABARITO: A**RESOLUÇÃO:**

Vamos representar por A , B e V a quantidade de bolas azuis, brancas e vermelhas na caixa, respectivamente. Sendo assim, temos que Luiz Arthur retirou da caixa $0,5A$, $0,7B$ e $0,8V$.

E, conseqüentemente, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}0,5A + 0,8V &= 0,62(A + V) \\0,5A - 0,62A &= 0,62V - 0,8V \\-0,12A &= -0,18V \\A &= 1,5V\end{aligned}$$

E que

$$\begin{aligned}0,7B + 0,8V &= 0,74(B + V) \\0,7B - 0,74B &= 0,74V - 0,8V \\-0,04B &= -0,06V \\B &= 1,5V\end{aligned}$$

Logo, a percentagem de bolas na caixa é

$$\frac{0,5A + 0,7B + 0,8V}{A + B + V} = \frac{0,5(1,5V) + 0,7(1,5V) + 0,8V}{1,5V + 1,5V + V} = \frac{0,75V + 1,05V + 0,8V}{4V} = 0,65 = 65\%.$$

QUESTÃO 14 – GABARITO: E**RESOLUÇÃO:**

Sabemos que a idade média dos 10 competidores era, inicialmente, 40 anos, assim:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = 40 \quad (\text{i})$$

Também sabemos que excluindo x_1 , a menor idade, e x_{10} , a maior idade, obtemos a média:

$$\frac{x_2 + \dots + x_9}{8} = 41,5$$

Note que multiplicando cruzado:

$$\begin{aligned}x_2 + \dots + x_9 &= 41,5 \cdot 8 \\x_2 + \dots + x_9 &= 332 \quad (\text{ii})\end{aligned}$$

Substituindo (ii) em (i), chegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + 332 + x_{10}}{10} &= 40 \\x_1 + 332 + x_{10} &= 400 \\x_1 + x_{10} &= 68 \quad (\text{iii})\end{aligned}$$

Em seguida, temos outra média:

$$\frac{x_2 + \dots + x_9 + x_i}{9} = 43 \quad (\text{iv})$$

onde x_i é a idade de quem voltou para a competição. Novamente, substituindo (ii) em (iv), concluímos que:

$$\frac{332 + x_i}{9} = 43$$

Multiplicando cruzado:

$$332 + x_i = 43 \cdot 9$$

$$332 + x_i = 387$$

$$x_i = 55$$

Ou seja, o competidor que voltou para a maratona tem 55 anos e é o concorrente x_{10} , isto é, o mais velho.

De (iii), conseguimos descobrir que o corredor desclassificado é o mais novo (x_1) e, dessa forma, tem:

$$x_1 + 55 = 68$$

$$x_1 = 13 \text{ anos.}$$

QUESTÃO 15 – GABARITO: D

RESOLUÇÃO:

A soma dos ângulos internos de um polígono é $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$, como o hexágono tem 6 lados, então $S = 720^\circ$. Como o hexágono é regular, cada ângulo possui o valor de $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$. Na figura 1, o ângulo $A\hat{O}B = 60^\circ$, pois é ângulo central correspondente ao arco \widehat{AB} , que por sua vez equivale a terça parte de 180° . O ângulo $O\hat{A}B$ também é igual 60° , já que o diâmetro AD divide ao meio o ângulo $B\hat{A}F = 120^\circ$. Logo, a figura 1 é um triângulo equilátero com medida dos lados igual a 2 cm, assim temos que a sua área possui valor $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A figura 2 representa um losango que possui o dobro do valor da figura 1, ou seja, $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A figura 3 é um triângulo retângulo em E , porque o ângulo inscrito $A\hat{E}D$ corresponde ao arco de 180° , desta forma, o segmento de reta AE é calculado pelo teorema de Pitágoras

$$4^2 = 2^2 + (AE)^2$$

$$AE = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Portanto, o triângulo da figura 3 possui área $\frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A figura 4, também representada por um triângulo, possui área igual à figura 1, por ter mesma base e mesma altura, ou é a metade da área da figura 2. Enfim, as áreas das figuras 1, 2, 3 e 4 respectivamente nessa ordem, são: $\sqrt{3} \text{ cm}^2, 2\sqrt{3} \text{ cm}^2, 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Portanto, o produto dessas áreas é numericamente igual a $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

QUESTÃO 16 – GABARITO: E**RESOLUÇÃO:**

Como G é o baricentro do triângulo $A_4A_5A_7$ temos que $A_7G = \frac{2}{3}A_7B = \frac{2}{3}h$.

Segue que $\frac{2}{3}h = 12 \Rightarrow h = 18 \text{ cm}$.

Temos ainda que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ onde ℓ é o lado do triângulo $A_4A_5A_7$, o qual é equilátero pelo fato do hexágono ser regular.

Dessa forma, temos que $18 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 12\sqrt{3} \text{ cm}$.

Note ainda que $\ell = 2 \cdot R$, onde R é o rádio das esferas e assim obtemos $R = 6\sqrt{3} \text{ cm}$.

Portanto o volume das sete esferas é:

$$V = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 7 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})^3 = 6048\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3.$$

QUESTÃO 17 – GABARITO: C**RESOLUÇÃO:**

O total de funcionários é o maior possível para que todos recebam a mesma quantia de mudas de cada tipo, logo:

$$\text{mdc}(180, 120, 90, 60) = 30 \text{ funcionários}$$

Assim, o quantitativo de mudas por funcionário fica:

$(180 \text{ mudas de café}) \div (30 \text{ funcionários}) = 6 \text{ mudas de café para cada funcionário}$

$(120 \text{ mudas de mandioca}) \div (30 \text{ funcionários}) = 4 \text{ mudas de mandioca para cada funcionário}$

$(90 \text{ mudas de laranja}) \div (30 \text{ funcionários}) = 3 \text{ mudas de laranja para cada funcionário}$

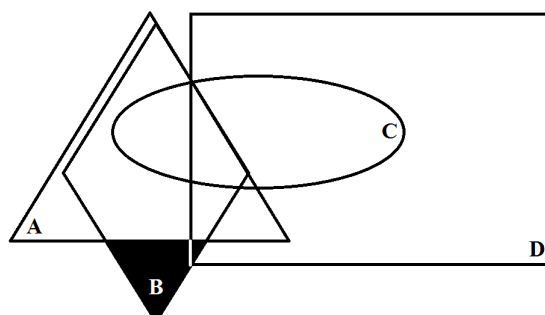
$(60 \text{ mudas de limoeiro}) \div (30 \text{ funcionários}) = 2 \text{ mudas de limoeiro para cada funcionário}$

Portanto, o total de mudas por funcionário é: $6 + 4 + 3 + 2 = 15 \text{ mudas por funcionário}$.

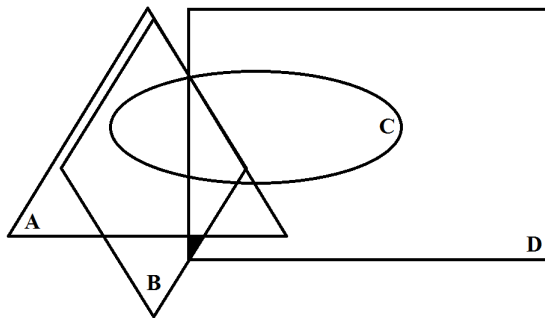
QUESTÃO 18 – GABARITO: E**RESOLUÇÃO:**

Dividiremos as operações dos conjuntos em partes para facilitar o entendimento:

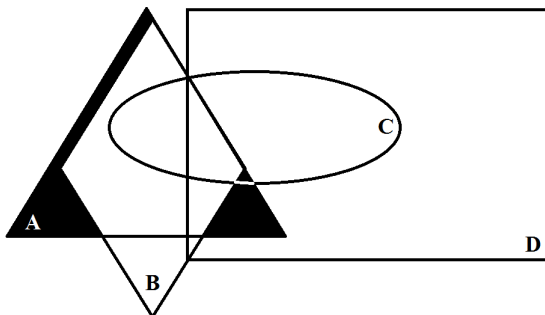
1ª Parte) $B - A$



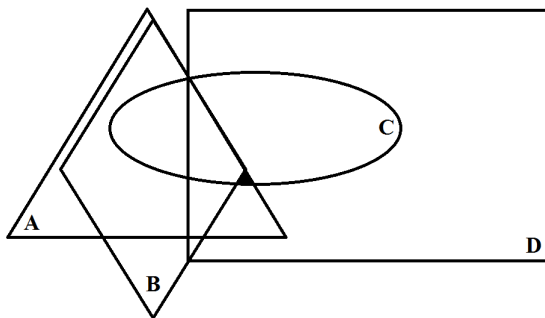
2ª Parte) $(B - A) \cap D$



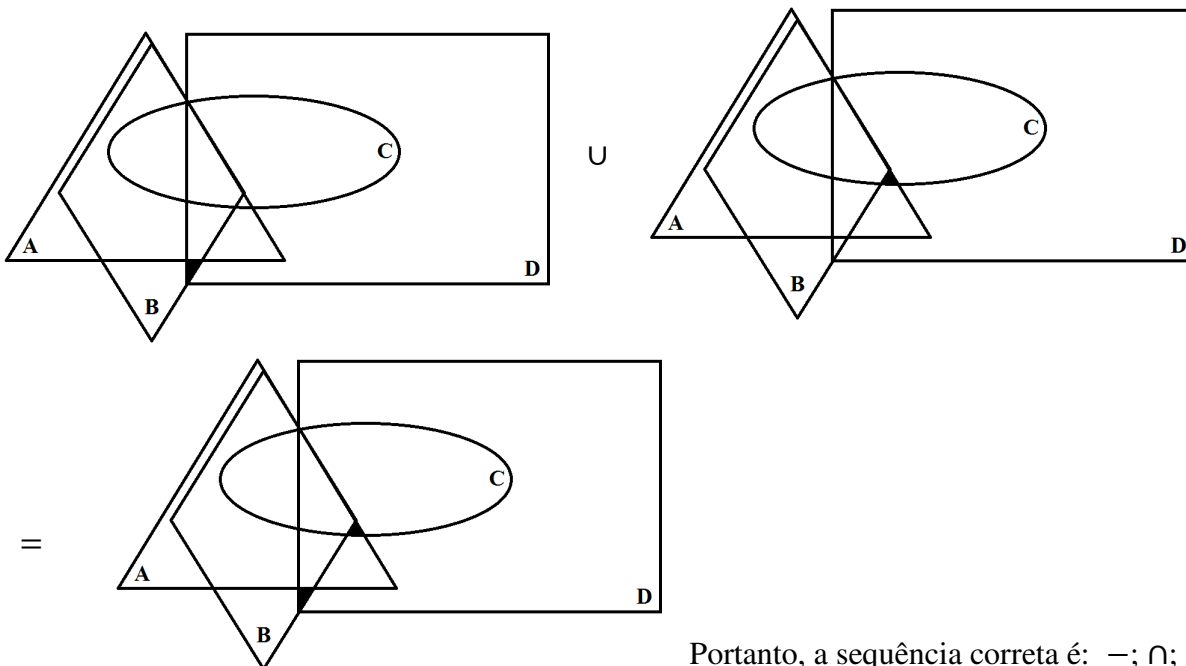
3ª Parte) $A - B$



4ª Parte) $(A - B) \cap C$



5ª Parte) $[(B - A) \cap D] \cup [(A - B) \cap C]$



Portanto, a sequência correta é: $-; \cap; \cup; -; \cap$

QUESTÃO 19 – GABARITO: A**RESOLUÇÃO:**

O objetivo é determinar $a \cdot b \cdot c$, sabendo que $a = b^c$, $b = c^a$, e $c = a^b$,

Assim, substituindo uma no outra obtemos:

$$a^b = c$$

$$(b^c)^b = c$$

$$((c^a)^c)^b = c$$

$$c^{a \cdot b \cdot c} = c$$

$$a \cdot b \cdot c = 1$$

Logo, $a \cdot b \cdot c = 1$ que é o elemento neutro da multiplicação.

QUESTÃO 20 – GABARITO: C**RESOLUÇÃO:**

Para determinar a altura, precisaremos relacionar as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60° .

Assim, podemos determinar:

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{h}{y} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{y} \Leftrightarrow \sqrt{3}y = h$$

e

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x+y} \Leftrightarrow 3h = \sqrt{3}(x+y)$$

$$3h = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y$$

$$3h = \sqrt{3}x + h$$

$$3h - h = \sqrt{3}x$$

$$2h = \sqrt{3}x$$

$$h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Sabemos que o avião está a 250 m/s e que ele gastou 4 segundos para atravessar o tamanho x . Desse modo, $x = 250 \cdot 4 = 1000$ m. Logo,

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot 1000}{2} = 500\sqrt{3} \text{ m}$$

QUESTÃO 21 – GABARITO: A**RESOLUÇÃO:**

Vejamos o sinal de cada um dos termos do produto:

- $a < 0$, pois a concavidade da parábola está voltada para baixo.
- $c < 0$, pois a parábola intercepta a parte negativa do eixo y .
- $\Delta > 0$, pois a parábola intercepta o eixo x em dois pontos x_1 e x_2 .
- $x_1 < 0$, pois encontra-se na parte negativa do eixo x .
- $x_2 < 0$, pois encontra-se na parte negativa do eixo x .
- $x_V < 0$, pois o vértice da parábola encontra-se na parte negativa do eixo x .
- $y_V > 0$, pois o vértice da parábola encontra-se na parte positiva do eixo y .
- $b < 0$, pois pela fórmula $x_V = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow b = -(x_V \cdot 2a)$, sendo $x_V < 0$ e $a < 0$.

Conclusão:

a	b	c	Δ	x_1	x_2	x_V	y_V
Negativo	Negativo	Negativo	Positivo	Negativo	Negativo	Negativo	Positivo
-	-	-	+	-	-	-	+

Logo, o produto é um número real positivo.

QUESTÃO 22 – GABARITO: D**RESOLUÇÃO:**

Podemos observar que:

$$a\#b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow a\#b = (a - b) \cdot (a + b)$$

Assim, quando a e b são números consecutivos, com $a > b$, temos que $(a - b) = 1$ e, portanto, a operação $a\#b$ retorna apenas a soma dos dois números. Logo,

$$\begin{aligned} & (2019\#2018) + (2017\#2016) + (2015\#2014) + \dots + (5\#4) + (3\#2) + 1 = \\ & = (2019 + 2018) + (2017 + 2016) + (2015 + 2014) + \dots + (5 + 4) + (3 + 2) + 1 \end{aligned}$$

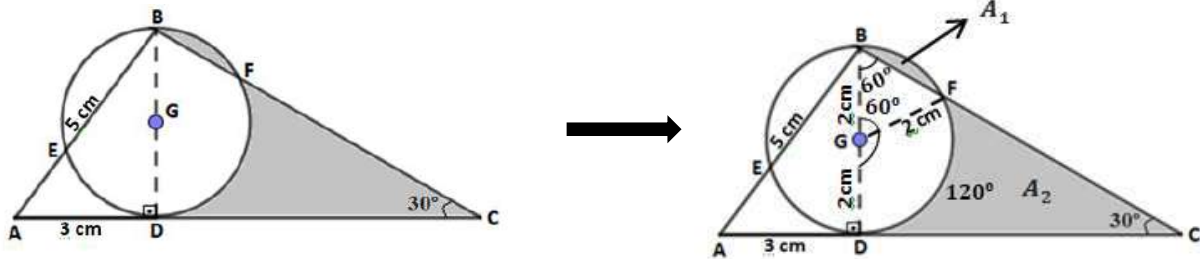
A soma que aparece é uma soma de progressão aritmética de razão 1. Assim,

$$\begin{aligned} S_{2019} &= \frac{(2019 + 1) \cdot 2019}{2} = \\ &= 1010 \cdot 2019 = \\ &= 2039190 \end{aligned}$$

QUESTÃO 23 – GABARITO: E

RESOLUÇÃO:

Para facilitar o entendimento, utilizaremos a imagem a seguir para a resolução:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, temos

$$5^2 = 3^2 + (\overline{BD})^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{25 - 9} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4 \text{ cm.}$$

Como $\overline{BD} = 4 \Leftrightarrow \overline{BG} = \overline{GD} = \overline{GF} = 2 \text{ cm}$, pois G é centro da circunferência e \overline{BD} é o diâmetro.

O ângulo $D\hat{B}C = 60^\circ$, já que os ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$ possuem valores de 30° e 90° respectivamente, assim, o arco $\widehat{DF} = 120^\circ$ por representar o dobro do ângulo inscrito $D\hat{B}F$.

Assim, temos que o arco $\widehat{BF} = 60^\circ$ e, conseqüentemente, o ângulo $B\hat{G}F$ também possui 60° por representar o ângulo central correspondente ao arco \widehat{BF} .

Desta forma, o triângulo GBF é equilátero com área $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\text{cm}^2$ e o setor circular BGF com área $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi \cdot 4}{6} = \frac{2\pi}{3}\text{cm}^2$.

Portanto, temos que $A_1 = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}^2$.

Por outro lado, temos que $\text{tg}30^\circ = \frac{4}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{4}{\text{tg}30^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\text{ cm.}$

Logo, a área do triângulo BCD é $\frac{\overline{CD} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}\text{cm}^2$.

E a área do setor circular DGF é $\frac{\pi r^2}{3} = \frac{4\pi}{3}\text{cm}^2$.

Então, temos que $A_2 = 8\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{24\sqrt{3} - 4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{21\sqrt{3} - 4\pi}{3}\right)\text{cm}^2$.

Por fim, a área procurada é

$$S = A_1 + A_2 = \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{21\sqrt{3} - 4\pi}{3}\right) = \left(\frac{18\sqrt{3} - 2\pi}{3}\right)\text{cm}^2.$$

QUESTÃO 24 – GABARITO: A**RESOLUÇÃO:**

Pode-se retirar uma verde e depois uma amarela, ou seja:

$$\frac{15}{60} \cdot \frac{20}{60} = \frac{300}{3600}$$

Ou pode-se retirar uma amarela e depois uma verde, ou seja:

$$\frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} = \frac{300}{3600}$$

Então:

$$P = \frac{300}{3600} + \frac{300}{3600} = \frac{600}{3600} = \frac{1}{6}$$

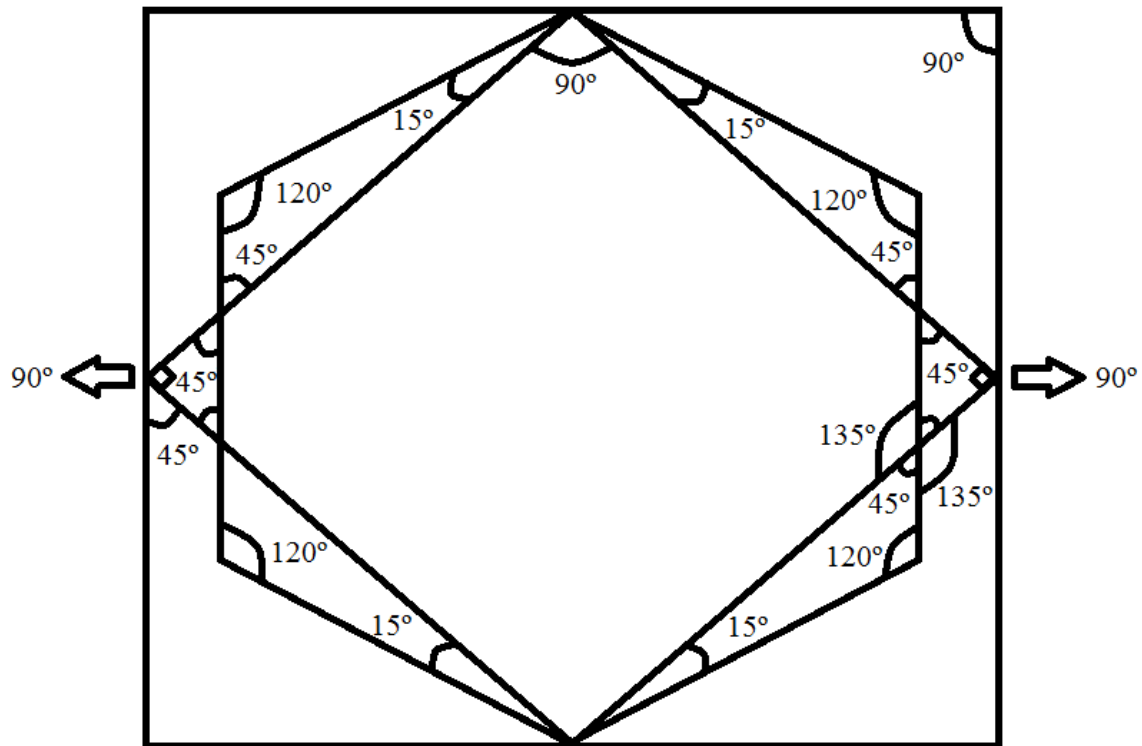
QUESTÃO 25 – GABARITO: B**RESOLUÇÃO:**

A soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$, onde n é o número de lados. Para calcular o valor de cada ângulo interno (a_i) basta dividir a soma dos ângulos internos (S) pelo número de lados do polígono.

Utilizando a observação acima, para os polígonos regulares quadrado e hexágono temos:

Soma dos ângulos internos no quadrado ($n = 4$)	Soma dos ângulos internos no hexágono ($n = 6$)
$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ $S_4 = (4 - 2) \cdot 180^\circ$ $S_4 = 2 \cdot 180^\circ$ $S_4 = 360^\circ$	$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ $S_6 = (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $S_6 = 4 \cdot 180^\circ$ $S_6 = 720^\circ$

Valor de todos os ângulos internos no quadrado ($n = 4$)	Valor de todos os ângulos internos no hexágono ($n = 6$)
$a_i = \frac{S_n}{n}$ $a_i = \frac{360^\circ}{4}$ $a_i = 90^\circ$	$a_i = \frac{S_n}{n}$ $a_i = \frac{720^\circ}{6}$ $a_i = 120^\circ$



$$\alpha = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 135^\circ, \varphi = 45^\circ, \theta = 120^\circ, \lambda = 15^\circ, \mu = 135^\circ \text{ e } \rho = 90^\circ$$

- Ângulos pares: $\alpha = 90^\circ, \theta = 120^\circ$ e $\rho = 90^\circ$

- Ângulos ímpares: $\beta = 45^\circ, \gamma = 135^\circ, \varphi = 45^\circ, \lambda = 15^\circ$ e $\mu = 135^\circ$

Soma dos ângulos pares (S_p)	Soma dos ângulos ímpares (S_i)
$S_p = \alpha + \theta + \rho$	$S_i = \beta + \gamma + \varphi + \lambda + \mu$
$S_p = 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ$	$S_i = 45^\circ + 135^\circ + 45^\circ + 15^\circ + 135^\circ$
$S_p = 300^\circ$	$S_i = 375^\circ$

Fazendo a divisão de S_p por S_i temos 0,8. Logo é uma dízima finita.

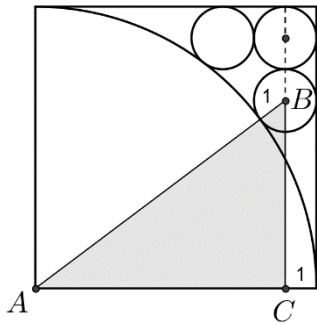
QUESTÃO 26 – GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Existem 9 números que começam por 0 (01, 02, ..., 09), 10 números que iniciam por 1 (10, 11, ..., 19), 10 números que iniciam por 2 (21, 21, ..., 29), 10 números que iniciam por 3 (30, 31, ..., 39), 10 números que iniciam por 4 (40, 41, ..., 49) e 10 números que iniciam por 5 (50, 51, ..., 59).

Logo, o número de sorteios em que os 6 números começam com o mesmo algarismo é

$$C_9^6 + 5 \cdot C_{10}^6 = 84 + 1050 = 1134.$$

QUESTÃO 27 – GABARITO: E**RESOLUÇÃO:**

Seja a o lado do quadrado. Construindo o triângulo ABC representado na figura ao lado temos:

$$AB = a + 1$$

$$AC = a - 1$$

$$BC = a - 3$$

Aplicando o teorema de Pitágoras temos

$$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + (a - 3)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 2a + 1 + a^2 - 6a + 9$$

$$a^2 - 10a + 9 = 0$$

As raízes são 1 e 9. Como $a = 1$ não faz sentido, então $a = 9$.

QUESTÃO 28 – GABARITO: D**RESOLUÇÃO:**

Seja S a soma dos três números de cada fila. Somando os números das quatro filas temos

$$4S = (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 1 + y + 3$$

pois os números que estão nas esquinas: 1, y e 3 se repetiram na soma acima.

Assim, $4S = 49 + y$ e, portanto, $49 + y$ precisa ser múltiplo de 4.

O primeiro múltiplo de 4 após 49 é $52 = 49 + 3$, mas $y = 3$ não é possível pois o 3 já está na figura. O próximo múltiplo de 4 é $56 = 49 + 7$ e, portanto, $y = 7$. Assim, $4S = 49 + 7 = 56$ e a soma dos três números de cada fila é $S = 14$ e considerando as filas da esquerda para a direita, duas já estão determinadas:

Segunda fila: 1 6 7

Terceira fila: 7 4 3

Os números ainda não utilizados são 2, 5, 8 e 9. Fica claro que 5 e 8 estão na primeira fila e 2 e 9 na quarta fila. Como x e z devem ser os menores possíveis temos:

Primeira fila: 5 8 1

Quarta fila: 3 9 2

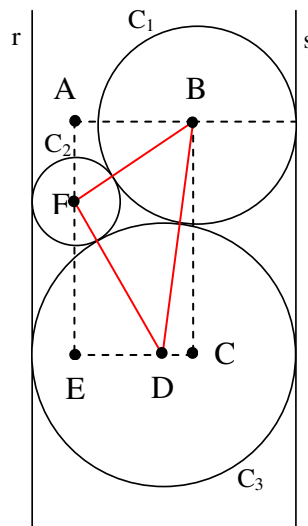
Assim, $x = 5$, $y = 7$ e $z = 2$ e $x + 2y + 3z = 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 25$.

QUESTÃO 29 – GABARITO: A**RESOLUÇÃO:**

No exato instante em que Adriano consegue sair da ponte, Waldir já havia percorrido seis sétimos da ponte, pois, ambos possuem a mesma velocidade. Portanto, o trem deve percorrer, simultaneamente, uma distância sete vezes maior do que aquela percorrida por Waldir. Logo, a velocidade do trem é $x = 7 \cdot 8 = 56 \text{ km/h}$.

QUESTÃO 30 – GABARITO: B**RESOLUÇÃO:**

O objetivo principal é determinar o raio de C_3 , pois a espessura da parede é dobro do raio de C_3 . Para tanto, é necessário construir alguns triângulos como representado na figura a seguir:



Chamaremos de r o raio da circunferência C_3 .

É possível observar alguns triângulos retângulos: ABF , BCD , DEF , os quais valem a teorema de Pitágoras:

Para o triângulo ABF , sabemos que $FB = 4 + 9 = 13$ e que $AB = 2r - 13$, logo

$$FB^2 = AF^2 + AB^2$$

$$13^2 = AF^2 + (2r - 13)^2$$

$$AF^2 = 169 - (4r^2 - 52r + 169)$$

$$AF^2 = -4r^2 + 52r$$

Para o triângulo BCD , sabemos que $DB = r + 9$ e que $CD = r - 9$, logo

$$DB^2 = BC^2 + CD^2$$

$$(r + 9)^2 = BC^2 + (r - 9)^2$$

$$BC^2 = (r^2 + 18r + 81) - (r^2 - 18r + 81)$$

$$BC^2 = 36r$$

Para o triângulo DEF , sabemos que $FD = r + 4$ e que $ED = r - 4$, logo

$$FD^2 = ED^2 + FE^2$$

$$(r + 4)^2 = (r - 4)^2 + FE^2$$

$$FE^2 = (r^2 + 8r + 16) - (r^2 - 8r + 16)$$

$$FE^2 = 16r$$

Podemos observar ainda que,

$$BC = AF + FE$$

Logo,

$$BC^2 = (AF + FE)^2$$

$$BC^2 = AF^2 + FE^2 + 2 \cdot AF \cdot FE$$

$$36r = -4r^2 + 52r + 16r + 2 \cdot \sqrt{-4r^2 + 52r} \cdot \sqrt{16r}$$

$$4r^2 - 32r = 2 \cdot \sqrt{16r^2(-4r + 52)}$$

$$4r^2 - 32r = 2 \cdot 4r \cdot \sqrt{-4r + 52}$$

$$r - 8 = 2 \cdot \sqrt{-4r + 52}$$

$$(r - 8)^2 = (2 \cdot \sqrt{-4r + 52})^2$$

$$r^2 - 16r + 64 = 4 \cdot (-4r + 52)$$

$$r^2 - 16r + 64 = -16r + 208$$

$$r^2 = 208 - 64$$

$$r^2 = 144$$

$$r = 12 \text{ cm}$$

Enfim, o raio da circunferência C_3 é 12 cm e, desse modo, a espessura da parede é 24 cm.