OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS INSTITUTOS FEDERAIS

OMIF 2020

Resolução Comentada da Prova de Primeira Fase

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

Esta prova é composta por 15 questões, distribuídas igualmente em 3 níveis, que pontuam o competidor segundo as seguintes regras:

- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 1 vale 3 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 2 vale 4 pontos;
- Cada acerto em uma das 5 questões do nível 3 vale 5 pontos;
- Cada erro em qualquer das 15 questões da prova vale 0 ponto, ou seja, o competidor não ganha e nem perde ponto com erros.

Deste modo, a nota final de cada competidor desta olimpíada é um número inteiro de 0 a 60. Contudo, seguindo esta regra, há exatamente 4 números inteiros neste intervalo que não podem ser a nota final de competidor algum. A soma destes números é:
A) 117
B) 118
C) 119
D) 120
E) 121

RESPOSTA DA QUESTÃO 01: Alternativa D
RESOLUÇÃO

Inicialmente, note que o competidor que erra todas as questões obtém nota zero e o competidor que acerta apenas uma questão, obtém, no mínimo, nota 3. Deste modo, 1 e 2 não podem ser a nota final de competidor algum.

Analogamente, o competidor que acerta todas as questões obtém nota igual a $3\times5+4\times5+5\times5=60$ e o competidor que erra apenas uma questão, obtém, no máximo, nota $60-3=57$. Deste modo, 58 e 59 não podem ser a nota final de competidor algum.

Como o enunciado menciona que há exatamente 4 números inteiros de 0 a 60 que não podem ser a nota final de competidor algum, então a soma solicitada é $1+2+58+59=120$.

Apenas a título de curiosidade, segue uma tabela contendo exemplos de como as demais notas podem ser alcançadas por um competidor (um exemplo para cada nota).

Nota	Acertos Nível 1	Acertos Nível 2	Acertos Nível 3
0	0	0	0
3	1	0	0
4	0	1	0
5	0	0	1
6	2	0	0
7	1	1	0
8	1	0	1
9	3	0	0
10	2	1	0
11	2	0	1
12	4	0	0
13	3	1	0
14	3	0	1
15	5	0	0
16	4	1	0
17	4	0	1
18	1	0	3
19	5	1	0
20	5	0	1
21	0	4	1
22	0	3	2
23	0	2	3
24	4	3	0
25	3	4	0
26	0	4	2
27	0	3	3
28	0	2	4
29	0	1	5
30	0	5	2
31	0	4	3
32	0	3	4
33	0	2	5
34	3	0	5
35	2	1	5
36	1	2	5
37	0	3	5
38	3	1	5
39	2	2	5
40	1	3	5
41	0	4	5
42	3	2	5
43	2	3	5
44	1	4	5
45	0	5	5
46	3	3	5
47	2	4	5
48	1	5	5
49	4	3	5
50	3	4	5
51	2	5	5
52	5	3	5
53	4	4	5
54	3	5	5
55	5	5	4
56	5	4	5
57	4	5	5
60	5	5	5

QUESTÃO 02

O operador matemático $\oplus$ é tal que, aplicado a qualquer número natural par, retorna a sua metade e, aplicado a qualquer número natural ímpar, retorna o seu triplo adicionado de uma unidade. Por exemplo, $\oplus(14) = 7$ e $\oplus(15) = 46$.

Se aplicarmos este operador ao número 20 e, ao seu resultado, aplicarmos este operador novamente, e assim sucessivamente, até concluir 2020 aplicações do operador, que número obteremos?

A) 10
B) 5
C) 4
D) 2
E) 1

RESPOSTA DA QUESTÃO 02: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Aplicando este operador ao número 20 e continuando a aplicação aos resultados obtidos, temos:

Número de aplicações do operador	**Resultado**
1	$\oplus(20) = \frac{20}{2} = 10$
2	$\oplus(10) = \frac{10}{2} = 5$
3	$\oplus(5) = 3 \times 5 + 1 = 16$
4	$\oplus(16) = \frac{16}{2} = 8$
5	$\oplus(8) = \frac{8}{2} = 4$
6	$\oplus(4) = \frac{4}{2} = 2$
7	$\oplus(2) = \frac{2}{2} = 1$
8	$\oplus(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$
9	$\oplus(4) = \frac{4}{2} = 2$
10	$\oplus(2) = \frac{2}{2} = 1$

Observe que, a partir da quinta aplicação do operador, os resultados seguem um padrão: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 e assim por diante, indefinidamente.

Deste modo, a partir da quinta aplicação, sempre que o número de aplicações for um múltiplo de 3, o resultado será 2 e, em seguida, o resultado será 1.

Como 2020 é um sucessor de um múltiplo de 3, então, aplicando o operador por 2020 vezes, obtém-se o número 1.

QUESTÃO 03

A expressão numérica abaixo se refere a várias adições. Os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5 são somados diversas vezes, nesta ordem, até que se obtenha, como resultado, o número 2020. Note que, para isso, foi necessário parar a expressão no 4.

$$0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4+5+\ldots$$
$$\ldots+0+1+2+3+4+5+0+1+2+3+4=2020$$

A quantidade de sinais de adição (+) que foram utilizados na expressão numérica acima é
A) 805
B) 806
C) 807
D) 808
E) 809

RESPOSTA DA QUESTÃO 03: Alternativa D
RESOLUÇÃO

A expressão segue um padrão com 6 sinais de adição e soma igual a 15:

$$0+1+2+3+4+5+$$

Como 2020 dividido por 15 resulta em quociente 134 e resto 10, pode-se afirmar que este padrão se repetirá completamente por 134 vezes na expressão. O resto 10 indica que, após as 134 repetições do padrão, ainda faltam 10 unidades para que a soma resulte em 2020. Dessa forma, para finalizar o primeiro membro da expressão, foi necessária uma parte incompleta do padrão $(0+1+2+3+4)$, que possui 4 sinais de adição.

Portanto, a quantidade de sinais de adição (+) utilizados na expressão foi $(134\times 6)+4=808$.

QUESTÃO 04

Recentemente, um garoto nigeriano de 12 anos, Chika Ofili, descobriu um critério matemático de divisibilidade por 7. Ele percebeu que, para saber se um número é divisível por 7, basta multiplicar o último algarismo deste número por 5 e somar ao número que sobra ao se retirar este último dígito. Se esse resultado for divisível por 7, então o número inicial é divisível por 7 também. Se o resultado encontrado for um número "grande", pode-se repetir o processo até que se consiga fazer esta verificação com mais facilidade.

Por exemplo, o número 658 é divisível por 7 se $5 \times 8 + 65 = 105$ também for. Repetindo o processo, 105 é divisível por 7 se $5 \times 5 + 10 = 35$ também for. Como 35 é divisível por 7, então, o número 658 é divisível por 7 também.

Considere o menor número de seis algarismos distintos do tipo AB3456 que é divisível por 7. Neste caso, o valor de A+B é:

A) 2
B) 6
C) 9
D) 13
E) 14

RESPOSTA DA QUESTÃO 04: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Iniciando o critério de divisibilidade por 7 apresentado no enunciado, tem-se que:

- AB3456 é divisível por 7 se $5 \times 6 + \text{AB345} = \text{AB375}$ também for.
- Repetindo o processo, AB375 é divisível por 7 se $5 \times 5 + \text{AB37} = \text{AB62}$ também for.
- O número AB62 é divisível por 7 se $5 \times 2 + \text{AB6} = \text{A}(\text{B}+1)6$ também for, considerando que $(\text{B}+1)$ é um algarismo.
- Finalmente, o número $\text{A}(\text{B}+1)6$ é divisível por 7 se $5 \times 6 + \text{A}(\text{B}+1) = (\text{A}+3)(\text{B}+1)$ também for, considerando que $(\text{A}+3)$ e $(\text{B}+1)$ são algarismos.

Como a questão se refere ao menor número de seis algarismos distintos do tipo AB3456 que é divisível por 7, tem-se que AB deve ser o menor possível, com A e B diferentes entre si e diferentes de 3, 4, 5 e 6.

Desse modo, para $\text{A} = 1$, tem-se que:

$$(\text{A}+3)(\text{B}+1) = 4(\text{B}+1)$$

será divisível por 7 se

$$(\text{B}+1) = 2 \Rightarrow \boxed{\text{B} = 1}$$

ou se

$$(\text{B}+1) = 9 \Rightarrow \boxed{\text{B} = 8}.$$

Como A e B são diferentes entre si, então $\text{B} = 8$.

Logo, $\text{A} + \text{B} = 1 + 8 = 9$.

QUESTÃO 05

O coordenador da Comissão de Elaboração de Provas da OMIF deseja criar uma senha para acessar a pasta que contém as questões que serão selecionadas para compor a prova da primeira fase. O coordenador definiu que a senha será composta pelos caracteres de OMIF2020, não necessariamente nesta ordem, de modo que os zeros não estejam juntos, ressaltando que a letra O é diferente do número 0 (zero). Quantas são as senhas com essa configuração?

A) 7580
B) 7560
C) 7540
D) 7520
E) 7500

RESPOSTA DA QUESTÃO 05: Alternativa B
RESOLUÇÃO

Para determinar a quantidade de senhas com as restrições apresentadas na questão, basta contar quantas permutações OMIF2020 possui no total e, desse valor, subtrair a quantidade de permutações em que os 0's ficam juntos:

- Permutações de OMIF2020 (permutação de 8 elementos com repetição de dois elementos iguais a 2 e dois elementos iguais a 0):

$$P_8^{2,2} = \frac{8!}{2!\,2!} = 10\,080$$

- Permutações de OMIF2020 em que os 0's ficam juntos (neste caso, os dois zeros juntos podem ser considerados como um só elemento e, desta forma, deve-se calcular a permutação de 7 elementos com repetição de dois elementos iguais a 2):

$$P_7^{2} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$$

Portanto, a quantidade de senhas com a configuração mencionada na questão é:

$$10\,080 - 2\,520 = 7\,560$$

NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 06

Em uma sala do *campus* Betim, do Instituto Federal, estão alocados exatamente 50 alunos para resolver a prova da primeira fase da OMIF 2020. A faixa etária desses alunos varia de 14 a 20 anos. Apenas com estas informações hipotéticas, pode-se afirmar, com certeza, que, nessa sala:

A) não existe aluno que faça aniversário em dezembro.
B) sete alunos têm 14 anos.
C) pelo menos um aluno tem 18 anos.
D) pelo menos seis alunos fazem aniversário no mesmo mês.
E) pelo menos oito alunos têm a mesma idade.

RESPOSTA DA QUESTÃO 06: Alternativa E
RESOLUÇÃO

O objetivo da questão é determinar a alternativa que afirma algo, com certeza, correto. Uma das formas de se fazer isso é realizar a análise de cada uma das alternativas de maneira individual:

A) não existe aluno que faça aniversário em dezembro.

É possível que, dentre os 50 alunos, tenha pelo menos um que faça aniversário em dezembro. Em uma situação mais extrema, é possível que todos os 50 alunos façam aniversário em dezembro. Desta forma, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

B) sete alunos têm 14 anos.

É perfeitamente possível que, dentre os 50 alunos, menos de sete tenham 14 anos. Desta forma, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

C) pelo menos um aluno tem 18 anos.

É perfeitamente possível que, dentre os 50 alunos, nenhum tenha 18 anos. Assim, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

D) pelo menos seis alunos fazem aniversário no mesmo mês.

É possível que se tenha, dentre os 50 alunos, 4 alunos fazendo aniversário em cada um dos meses de janeiro a outubro (40 alunos aniversariando nesses 10 meses), 5 alunos fazendo aniversário em novembro e 5 alunos fazendo aniversário em dezembro. Assim, não se pode dizer, com certeza, que a afirmação desta alternativa está correta.

E) pelo menos oito alunos têm a mesma idade.

Ao tentar exibir um contraexemplo para a afirmação, pode-se pensar, inicialmente, na possibilidade de que 7 alunos tenham 14 anos, 7 alunos tenham 15 anos, 7 alunos tenham 16 anos, 7 alunos tenham 17 anos, 7 alunos tenham 18 anos, 7 alunos tenham 19 anos e 7 alunos tenham 20 anos, totalizando, até então, $7 \times 7 = 49$ alunos. O 50° aluno terá obrigatoriamente uma idade de 14 a 20 anos, garantindo que pelo menos 8 alunos tenham a mesma idade. Ao tentar exibir qualquer outro contraexemplo, perceba que não será possível ter menos de 8 alunos com mesma idade em todas as idades em questão. Portanto, a afirmação desta alternativa está, com certeza, correta.

QUESTÃO 07

Para comemorar seu aniversário, Gabriela convidou 32 pessoas para uma festinha em sua casa e resolveu preparar alguns brigadeiros para servi-las. Contudo, com tantas tarefas na arrumação da festa, ela se enganou na cozinha e preparou apenas uma receita, que é o suficiente para preparar somente 54 brigadeiros do tamanho normal, que ela está acostumada a fazer. Por isso ela pretende enrolar os brigadeiros num tamanho menor do que o normal, para conseguir fazer exatamente 4 para cada convidado (ela não vai comer). Considerando que os brigadeiros tenham forma esférica e sabendo que o volume de uma esfera de raio R pode ser calculado pela relação $V_{esf} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, em que porcentagem Gabriela deve reduzir o raio do brigadeiro normal, para que consiga esse feito?

A) 25%
B) 42%
C) 50%
D) 58%
E) 75%

RESPOSTA DA QUESTÃO 07: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Seja R o raio do brigadeiro de tamanho normal. Pelo enunciado, o volume da receita de brigadeiros de Gabriela é:

$$V = 54 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Agora, seja r o raio do brigadeiro menor, que Gabriela deverá preparar para que consiga fazer os $32 \times 4 = 128$ brigadeiros. Como o volume da receita é o mesmo, tem-se que:

$$128 \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{\pi} \cdot r^3 = 54 \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{\pi} \cdot R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = \frac{54}{128} = \frac{27}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{r^3}{R^3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 0,75 \cdot R}$$

Como o raio do brigadeiro menor é 75% do raio do brigadeiro normal, então houve uma redução de 25% no raio do brigadeiro normal.

QUESTÃO 08

O *número de ouro,* representado pela letra φ, é um número irracional, muito estudado por alguns matemáticos e considerado, por algumas pessoas, como o número que aparece nas coisas mais belas da natureza. Também chamado de razão áurea ou de proporção divina, seu valor pode ser encontrado calculando-se a raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. O valor de φ^6, em função de φ, é:

A) $\varphi + 2$
B) $4\varphi + 2$
C) $6\varphi + 6$
D) $8\varphi + 5$
E) $12\varphi + 23$

RESPOSTA DA QUESTÃO 08: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Como φ é raiz positiva da equação quadrática fornecida, então:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

Elevando os dois membros da segunda igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$\left(\varphi^2\right)^2 = (\varphi + 1)^2$$
$$\varphi^4 = \varphi^2 + 2\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = (\varphi + 1) + 2\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = 3\varphi + 2$$

Multiplicando os dois membros desta última igualdade por φ^2, obtém-se:

$$\varphi^4 \cdot \varphi^2 = (3\varphi + 2) \cdot \varphi^2$$
$$\varphi^6 = (3\varphi + 2) \cdot (\varphi + 1)$$
$$\varphi^6 = 3\varphi^2 + 3\varphi + 2\varphi + 2$$
$$\varphi^6 = 3(\varphi + 1) + 5\varphi + 2$$
$$\boxed{\varphi^6 = 8\varphi + 5}$$

QUESTÃO 09

Em uma caixa, foram colocados 8 cartões de mesmo tamanho, peso e aspecto, cada um com uma letra ou número escrito, de modo que era possível escrever OMIF2020, se fossem colocados um cartão ao lado do outro, observando que a letra O é diferente do número 0 (zero). De uma única vez, quatro desses cartões são sorteados ao acaso. Desta forma, a probabilidade de serem sorteados os cartões com as letras da palavra OMIF, em qualquer ordem, é:

A) $\dfrac{1}{70}$
B) $\dfrac{1}{420}$
C) $\dfrac{1}{1024}$
D) $\dfrac{1}{1680}$
E) $\dfrac{1}{4096}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 09: Alternativa A

RESOLUÇÃO

A retirada dos 4 cartões da caixa pode ser feita de

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 70$$

maneiras diferentes, todas com igual probabilidade de acontecer. E as letras da palavra OMIF aparecem em apenas uma dessas possibilidades. Logo, a probabilidade solicitada é:

$$\boxed{P = \frac{1}{70}}$$

QUESTÃO 10

Um professor de matemática pensa em quatro números (a, b, c, d) e pergunta a sua aluna Pâmela qual é a média aritmética simples desses quatro números. Para isso, ele fornece apenas duas informações para ela:

(1) $2a+3b+5c+8d=41$
(2) $7a+6b+4c+d=31$

Sobre a suficiência destas informações para que Pâmela possa responder a pergunta sobre a média, podemos concluir que:

A) A informação 1, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 2, sozinha, não é o suficiente.
B) A informação 2, sozinha, é o suficiente para responder a pergunta, mas a informação 1, sozinha, não é o suficiente.
C) As duas informações, juntas, são suficientes para responder a pergunta, mas nenhuma delas sozinha é o suficiente.
D) Tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder a pergunta.
E) A pergunta não pode ser respondida só com as duas informações fornecidas.

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: Alternativa C
RESOLUÇÃO

Para que Pâmela possa responder a pergunta sobre a média aritmética simples dos quatro números, é necessário que ela consiga calcular o valor da soma $a+b+c+d$, já que

$$MA=\frac{a+b+c+d}{4}$$

Considerando apenas a informação 1, ou seja, que $2a+3b+5c+8d=41$, pode-se ter, por exemplo,

$$\left.\begin{array}{l} a=19 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow MA=\frac{19+1+0+0}{4}=5$$

ou também

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=4 \end{array}\right\} \Rightarrow MA=\frac{0+3+0+4}{4}=1,75$$

Note que as médias obtidas são distintas e, portanto, a informação 1, sozinha, não é suficiente para responder a pergunta sobre a média. O mesmo raciocínio se aplica à informação 2, que, sozinha, também não é suficiente para responder a pergunta.

No entanto, considerando as duas informações em conjunto e somando as equações que elas apresentam membro a membro, obtém-se que a média aritmética simples é, necessariamente, igual a 2, uma vez que:

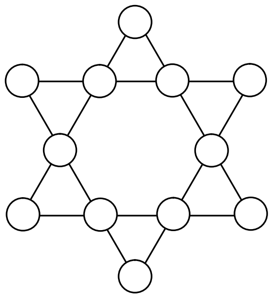
$$\begin{cases} 2a+3b+5c+8d=41 \\ \underline{7a+6b+4c+d\ \ =31} \end{cases} +$$
$$9a+9b+9c+9d=72 \Rightarrow a+b+c+d=8$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a+b+c+d}{4}=2$$

Logo, as duas informações, juntas, são suficientes para responder a pergunta, mas nenhuma delas sozinha é o suficiente.

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 11

A figura abaixo mostra uma estrela de 6 pontas com 12 círculos situados nas intersecções das retas que a formam. Note que, em cada segmento do desenho da estrela, há 4 círculos.



É possível escrever todos os números naturais de 1 a 12 nestes círculos de modo que as somas dos números nos 4 círculos de cada segmento sejam todas iguais. Qual é o valor dessas somas?

A) 12
B) 13
C) 24
D) 26
E) 39

RESPOSTA DA QUESTÃO 11: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Primeiramente, observe que a soma de todos os números naturais de 1 a 12 é

$$S = \frac{(1+12)\cdot 12}{2} = 78$$

Agora, note que:

- Na estrela em questão, há seis segmentos com 4 círculos cada.
- Cada círculo faz parte de exatamente dois segmentos.

Assim, sendo T a soma solicitada (soma dos números nos 4 círculos de cada segmento), $6T$ equivale ao dobro da soma de todos os números de 1 a 12, ou seja:

$$6T = 2\cdot 78 \Rightarrow \boxed{T = 26}$$

QUESTÃO 12

Em Três Corações/MG, foram construídas duas avenidas paralelas, descritas pelas equações $f(x)=x$ e $g(x)=x-4$. Para interligar as duas avenidas, foi construída uma rua coplanar descrita pela curva $h(x)=x^2-x-3$. Os pontos de acesso (intersecções) da rua com as avenidas formam os vértices de um triângulo, em cuja área se planeja fazer uma praça. Qual é a área dessa praça?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

RESPOSTA DA QUESTÃO 12: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Os pontos de interseção entre a rua e as avenidas podem ser determinados a partir dos seguintes sistemas:

- $\begin{cases} y=x \\ y=x^2-x-3 \end{cases}$

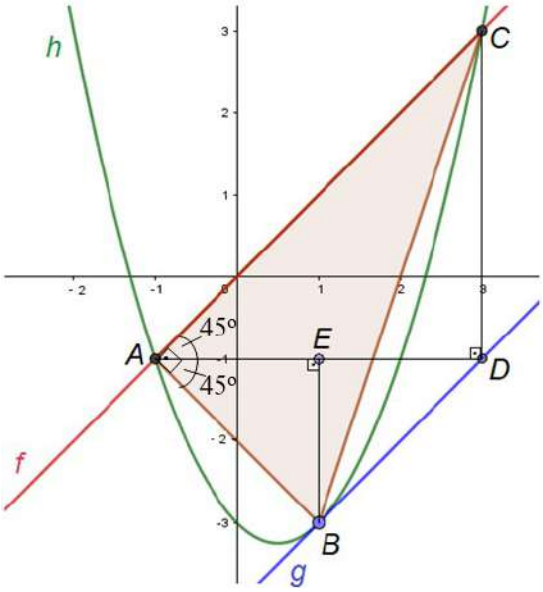
$$\Rightarrow x=x^2-x-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-1 \quad \rightarrow \quad \boxed{(-1,-1)} \\ \text{ou} \\ x=3 \Rightarrow y=3 \quad \rightarrow \quad \boxed{(3,3)} \end{cases}$$

- $\begin{cases} y=x-4 \\ y=x^2-x-3 \end{cases}$

$$\Rightarrow x-4=x^2-x-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-3 \quad \rightarrow \quad \boxed{(1,-3)}$$

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA:
Primeira maneira

A figura a seguir apresenta os gráficos de *f*, *g* e *h* no plano cartesiano. Nela, $A=(-1,-1)$ e $C=(3,3)$ são os pontos de intersecção entre *f* e *h*, e $B=(1,-3)$ é o ponto de intersecção entre *g* e *h*.



Além disso, $D=(3,-1)$ e $E=(1,-1)$ são pontos escolhidos do plano de modo que $\overline{AD}$ seja paralelo ao eixo *x* e $\overline{BE}$ e $\overline{DC}$ sejam paralelos ao eixo *y*.

Perceba que o triângulo *ABE* é retângulo e isósceles de lados de comprimento 2 e, por isso, o ângulo $B\hat{A}E$ mede 45º. Observe também que o triângulo *ACD* é retângulo e isósceles de lados de comprimento 4. Logo, o ângulo $C\hat{A}D$ também mede 45º, garantindo, assim, o perpendicularismo entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

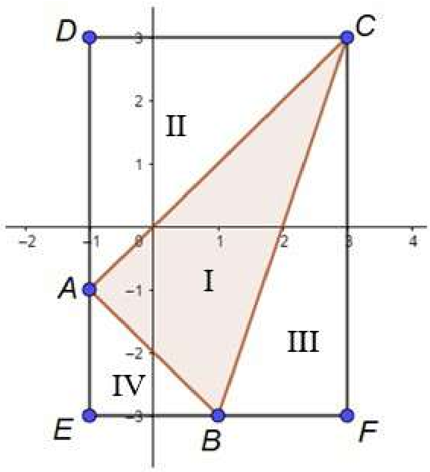
Agora, note que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{2}$, pois equivale à diagonal de um quadrado de lado de comprimento 2, e $\overline{AC}$ mede $4\sqrt{2}$, pois equivale à diagonal de um quadrado de lado de comprimento 4.

Como o triângulo *ABC* é retângulo, a área da praça pode ser calculada pelo semiproduto dos seus catetos, ou seja:

$$S=\frac{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=8$$

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA: Segunda maneira

Sejam $A=(-1,-1)$, $B=(1,-3)$ e $C=(3,3)$ os pontos de intersecção da rua com as avenidas e *CDEF* um retângulo com lados paralelos aos eixos *x* ou *y* e circunscrito ao triângulo *ABC*, conforme mostra a figura.



Para determinar a área desejada, deve-se calcular a área do triângulo *ABC*, indicado por I na figura. Para isso, pode-se calcular a área do retângulo *CDEF* e dela subtrair as áreas dos triângulos retângulos indicados por II, III e IV (triângulos *ACD*, *BCF* e *ABE*, respectivamente). Tem-se que:

$$Área_{CDEF} = EF \cdot CF = 4 \cdot 6 = 24$$

$$Área_{\mathrm{II}} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$Área_{\mathrm{III}} = \frac{BF \cdot CF}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

$$Área_{\mathrm{IV}} = \frac{BE \cdot AE}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

Logo, a área do triângulo I, em cuja área se planeja fazer uma praça, é $24-8-6-2=8$.

CÁLCULO DA ÁREA DA PRAÇA: Terceira maneira

A área da praça pode ser calculada via determinante, utilizando os pontos $A=(-1,-1)$, $B=(1,-3)$ e $C=(3,3)$, como segue abaixo:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|-16| = 8$$

QUESTÃO 13

As figuras abaixo mostram um triângulo equilátero de lado L girando ao redor de um quadrado fixo de lado 2L. Os lados do triângulo estão nomeados de 1, 2 e 3, e os lados do quadrado estão nomeados de A, B, C e D. A Figura 1 representa a posição inicial do triângulo e a Figura 2 representa a nova posição do triângulo equilátero após finalizar o 1° giro.

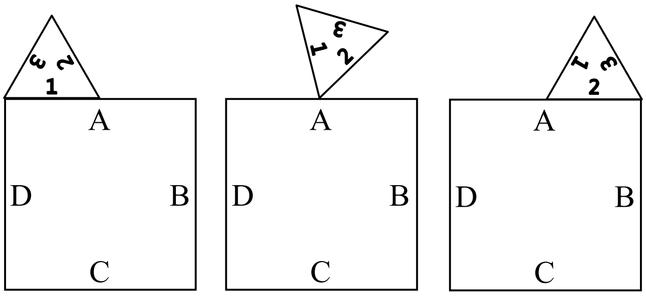


Figura 1 Figura 2

Após o 2° giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 3 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 3. E após o 3° giro, o lado do triângulo equilátero representado pelo número 1 estará em contato com o lado do quadrado representado pela letra B, formando, assim, a Figura 4.

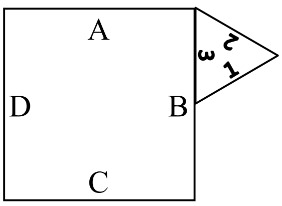


Figura 3

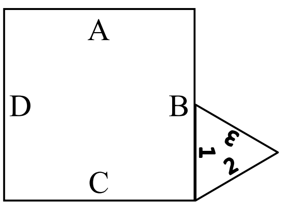


Figura 4

Se o triângulo equilátero continuar girando ao redor do quadrado fixo, os lados que estarão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado na Figura 2020 são, respectivamente:

A) 1 e A
B) 1 e B
C) 1 e C
D) 2 e B
E) 2 e C

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Observe que os lados que estão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado formam um padrão que se inicia na Figura 1 e finaliza na Figura 24, conforme o esquema abaixo:

Figura 1 → 1 e A
Figura 2 → 2 e A
Figura 3 → 3 e B
Figura 4 → 1 e B
Figura 5 → 2 e C
Figura 6 → 3 e C
Figura 7 → 1 e D
Figura 8 → 2 e D
Figura 9 → 3 e A
Figura 10 → 1 e A
Figura 11 → 2 e B
Figura 12 → 3 e B
Figura 13 → 1 e C
Figura 14 → 2 e C
Figura 15 → 3 e D
Figura 16 → 1 e D
Figura 17 → 2 e A
Figura 18 → 3 e A
Figura 19 → 1 e B
Figura 20 → 2 e B
Figura 21 → 3 e C
Figura 22 → 1 e C
Figura 23 → 2 e D
Figura 24 → 3 e D
Figura 25 → 1 e A
Figura 26 → 2 e A
⋮

Note que as figuras numeradas com múltiplos de 24, terão lados 3 e D em contato, já que a Figura 25 é equivalente à Figura 1.

Como 2016 é múltiplo de 24, continuando a sequência, temos que:

Figura 2016 → 3 e D
Figura 2017 → 1 e A
Figura 2018 → 2 e A
Figura 2019 → 3 e B
Figura 2020 → 1 e B

Assim, os lados que estarão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado na Figura 2020 são 1 e B.

OBSERVAÇÃO: Os lados que estão em contato entre o triângulo equilátero e o quadrado formam um padrão que se inicia na Figura 1 e finaliza na Figura 24, número este que também pode ser identificado pelo mínimo múltiplo comum entre 3 (referente aos lados 1, 2 e 3 no triângulo) e 8 (referente aos lados A, A, B, B, C, C, D e D no quadrado).

QUESTÃO 14

A distribuição dos professores de Ciências Exatas de um Instituto Federal, segundo sua área de atuação e sua idade, está de acordo com o seguinte quadro:

	Matemática	Física	Química	Total
Até 40 anos	3	3	1	7
Mais de 40 anos	4	2	2	8
Total	7	5	3	15

Estes professores pretendem formar um grupo de estudos sobre o ensino de Ciências Exatas no Ensino Médio. Durante a organização do grupo, foram definidas três atividade principais, as quais deveriam, cada uma, ter um professor coordenador diferente. De quantas maneiras distintas podem-se escolher estes coordenadores, se o primeiro deve ter mais de 40 anos, o segundo deve ser professor de matemática e o terceiro não pode ser um professor de química?

A) 672
B) 534
C) 504
D) 480
E) 380

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Para resolver este problema, deve-se dividi-lo em três casos, já que a escolha do primeiro coordenador influencia na quantidade de possibilidades de escolha dos outros dois. Pelo enunciado, sabe-se que o primeiro coordenador deve ter mais de 40 anos (pode ser professor de matemática, física ou química), que o segundo deve ser professor de matemática (independentemente da idade) e que o terceiro não pode ser um professor de química (independentemente da idade).

1º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de matemática com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 4 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além disso, como o segundo coordenador também deve ser professor de matemática, restam $7-1=6$ opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15-2-3=10$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os três professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 1º caso tem-se:

$$\underset{\substack{\text{Matemática}\\ +40\text{ anos}}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Matemática}}{\underline{6}} \times \underset{\substack{\text{Não}\\ \text{Química}}}{\underline{10}} = 240 \text{ opções de escolha}$$

2º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de Física com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 2 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além disso, como o segundo coordenador deve ser professor de matemática, existem 7 opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15-2-3=10$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os três professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 2º caso tem-se:

$$\underset{\substack{\text{Física}\\ +40\text{ anos}}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Matemática}}{\underline{7}} \times \underset{\substack{\text{Não}\\ \text{Química}}}{\underline{10}} = 140 \text{ opções de escolha}$$

3º Caso: Se o primeiro coordenador for professor de Química com mais de 40 anos

Neste caso, analisando a tabela, existem 2 opções de escolha para o primeiro coordenador. Além disso, como o segundo coordenador deve ser professor de matemática, existem 7 opções. E para o terceiro coordenador, que não pode ser professor de química, existem $15-2-2=11$ opções (do total de 15 professores, excluem-se os dois professores já escolhidos como coordenadores e os outros dois professores de química). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, para este 3º caso tem-se:

$$\underset{\substack{\text{Química}\\ +40\text{ anos}}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Matemática}}{\underline{7}} \times \underset{\substack{\text{Não}\\ \text{Química}}}{\underline{11}} = 154 \text{ opções de escolha}$$

Somando as opções de escolha de cada caso, conclui-se que o total de maneiras distintas com que se pode escolher estes coordenadores é:

$$240+140+154=534$$

QUESTÃO 15

Um octógono não regular tem todos os seus ângulos internos de mesma medida e 7 dos seus lados medem, nessa ordem, $2\sqrt{2}$, 7, $3\sqrt{2}$, 3, $6\sqrt{2}$, 2 e $4\sqrt{2}$. Qual é o comprimento do oitavo lado?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: Alternativa E

RESOLUÇÃO

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer de n lados é dada por:

$$S = (n-2)\cdot 180^\circ$$

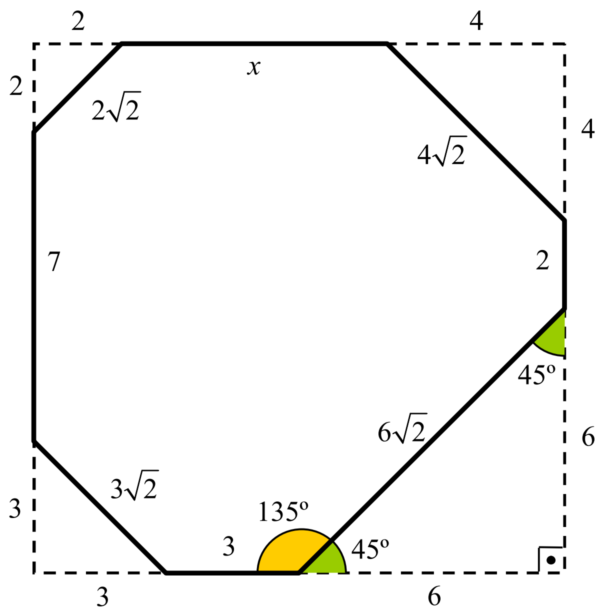
Assim, para um octógono, essa soma é:

$$S = (8-2)\cdot 180^\circ = 1080^\circ$$

Como, neste octógono, todos os ângulos internos têm a mesma medida, então cada ângulo mede:

$$a = \frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$$

Um octógono que possui todos os ângulos internos com medidas iguais a 135º pode ser pensado como tendo sido formado a partir de um retângulo com a retirada de suas "quinas" em ângulos de 45º, como ilustrado abaixo:



Nesta figura, note que as "quinas" retiradas são triângulos retângulos isósceles (já que possuem dois ângulos de medidas iguais a 45º), cujos catetos podem ser calculados usando-se o teorema de Pitágoras ou, simplesmente, dividindo-se a medida de cada hipotenusa por $\sqrt{2}$.

Observe, por fim, que o retângulo da figura é um quadrado de lado 12. Assim, o comprimento do oitavo lado é x, tal que

$$2 + x + 4 = 12$$

$$\boxed{x = 6}$$