QUESTÃO 1

a) Igualando os produtos dos números da primeira linha e da primeira coluna, e usando a letra c para representar o elemento da primeira linha e primeira coluna, temos que:

c	**4**	**3**
1		
a		

$c \cdot 4 \cdot 3 = c \cdot 1 \cdot a$ $\quad (c \neq 0,\ \text{pois deve ser positivo})$

$\boxed{a = 12}$

b) Igualando os produtos dos números da segunda coluna e da diagonal secundária, e usando a letra d para representar o elemento central, temos que:

	4	**3**
1	**d**	
12	**b**	

$4 \cdot d \cdot b = 3 \cdot d \cdot 12$ $\quad (d \neq 0,\ \text{pois deve ser positivo})$

$4 \cdot b = 3 \cdot 12$

$\boxed{b = 9}$

c) Igualando os produtos dos números da segunda linha e da segunda coluna, temos que:

c	**4**	**3**
1	**d**	**e**
12	**9**	**f**

$1 \cdot d \cdot e = 4 \cdot d \cdot 9$ $\quad (d \neq 0,\ \text{pois deve ser positivo})$

$\boxed{e = 36}$

Resta, agora, obter os números c, d e f, pertencentes à diagonal principal. Igualando os produtos das três linhas e da diagonal principal, obtemos:

$$12c = 36d = 108f = cdf$$

Do primeiro e terceiro membros, concluímos que $c = 9f$ e, do segundo e terceiro membros, concluímos que $d = 3f$. Assim, pelos dois últimos membros temos que:

$$108f = 9f \cdot 3f \cdot f \;\Rightarrow\; 108f = 27f^3 \;\Rightarrow\; 4 = f^2$$

Logo, como f deve ser positivo, temos que $\boxed{f = 2}$, de onde concluímos que $\boxed{c = 9 \cdot 2 = 18}$ e $\boxed{d = 3 \cdot 2 = 6}$. Logo, Antônio pode completar o tabuleiro da seguinte maneira:

18	**4**	**3**
1	**6**	**36**
12	**9**	**2**

QUESTÃO 2

a) A menor pontuação que uma seleção pode conquistar na primeira fase de forma que ainda seja possível avançar à fase seguinte é 2 pontos.

- Primeiramente, mostremos como é possível avançar com apenas 2 pontos. Suponhamos que as seleções de determinado grupo sejam A, B, C e D. Se A vencer todos os seus jogos e B, C e D empatarem entre si, então A terá 9 pontos e B, C e D terão 2 pontos cada. Assim, uma seleção dentre B, C e D avançará à fase seguinte, a depender apenas dos critérios de desempate. Logo, 2 pontos foram o suficiente para alguma seleção conseguir avançar à fase seguinte.

- Agora, vamos mostrar que é impossível avançar com 1 ponto só, para confirmar que 2 pontos é o mínimo que possibilita o avanço à fase seguinte. De fato, se alguma seleção, digamos a seleção B, terminar a fase de grupos com apenas 1 ponto, então ela necessariamente empatou um jogo e perdeu dois jogos. Isso significa que há duas seleções que venceram pelo menos um jogo e, portanto, ficariam com, no mínimo, 3 pontos, o que as colocariam em posições melhores do que B. Logo, B não avançaria à fase seguinte com apenas 1 ponto, dado que isso só é possível para as duas melhores seleções do grupo.

b) A pontuação mínima que garante que uma seleção avance à próxima fase é de 7 pontos.

- Primeiramente, vamos mostrar que 7 pontos garantem o avanço. De fato, se alguma seleção, digamos a seleção B, obtiver 7 pontos, então ela necessariamente venceu dois jogos e empatou um. Isso significa que os dois times que perderam de B vão conseguir, no máximo, 6 pontos na fase de grupos, o que coloca B a frente dessas duas seleções e garante, pelo menos, o seu segundo lugar no grupo, ou seja, o seu avanço à próxima fase.

- Agora, vamos mostrar que é possível que uma seleção não avance com 6 pontos, para confirmar que a pontuação mínima que garante o avanço é de 7 pontos. De fato, suponhamos que A, B e C venceram seus jogos contra D e que A venceu B, B venceu C e C venceu A. Desse modo, A, B e C possuiriam 6 pontos cada e, assim, um deles não avançará para a fase seguinte, dependendo apenas dos critérios de desempate. Logo, é possível que uma seleção com 6 pontos não avance à fase seguinte.

QUESTÃO 3

a) Há cinco “figuras” para serem coloridas (O, M, I, F e o pingo da letra I) e três cores podem ser utilizadas para o preenchimento de cada uma. Assim, temos:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

maneiras distintas de se pintar o que se deseja com as cores mencionadas.

b) Como a única restrição deste item é que o pingo da letra I tenha cor diferente do corpo da letra I, então, para cada cor utilizada no pingo, há apenas duas cores possíveis para o corpo da letra I, sendo ainda possível pintar as demais letras com qualquer uma das três cores. Assim, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$$

formas distintas de se pintar o que se deseja com as cores mencionadas de maneira que o pingo da letra I tenha cor diferente do corpo da letra I.

c) Vamos dividir este problema em dois casos:

- Se o corpo e o pingo da letra I forem pintadas com a mesma cor:
  Neste caso, teríamos 3 cores possíveis para pintá-los, enquanto as letras O e M teriam duas possibilidades cada e a letra F teria 3 possibilidades. Assim, teremos
  $$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$
  possibilidades de pintura.

- Se o corpo e o pingo da letra I forem pintadas com cores diferentes:
  Neste caso, teríamos $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de pintá-los, enquanto as letras O e M teriam apenas uma cor disponível para pintura e a letra F ainda teria 3 possibilidades. Assim, teremos
  $$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 18$$
  possibilidades de pintura.

Logo, temos

$$36 + 18 = 54$$

maneiras de se pintar o que se deseja de modo que as letras O e M não possuam as mesmas cores que o corpo da letra I e nem de seu pingo

d) Como são 5 “figuras” e 3 cores para pintá-las, há cores que pintarão mais “figuras” do que outras. Para que todas as cores mencionadas estejam presentes, é necessário que tenhamos 3 “figuras” pintadas com uma cor, 1 com outra e 1 com a terceira cor ou que tenhamos 2 “figuras” pintadas com uma cor, 2 com outra e 1 com a terceira cor.

- Se formos pintar 3 “figuras” com uma cor, 1 com outra e 1 com a terceira cor:
  Neste caso, temos 3 maneiras de escolher qual é a cor que pintará mais “figuras”. Digamos que a escolha tenha sido pintar 3 “figuras” com a cor A, 1 “figura” com a cor B e 1 com a cor C. Tomada esta decisão, temos 5 opções para escolher qual “figura” será pintada com B, depois 4

opções para escolher qual será pintada com C e, por fim, as que restarem serão pintadas com A. Assim, teremos

$$3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 60$$

possibilidades de pintura.

- Se formos pintar 2 "figuras" com uma cor, 2 com outra e 1 com a terceira cor:
  Neste caso, temos 3 maneiras de escolher qual é a cor que pintará menos "figuras". Digamos que a escolha tenha sido pintar 1 "figura" com a cor A, 2 "figuras" com a cor B e 2 com a cor C. Tomada esta decisão, temos 5 opções para escolher qual "figura" será pintada com A, depois $C_{4,2}$ opções para escolher qual será pintada com B e, por fim, as que restarem serão pintadas com C. Assim, teremos

$$3 \cdot 5 \cdot C_{4,2} \cdot 1 = 3 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 1 = 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 = 90$$

  possibilidades de pintura.

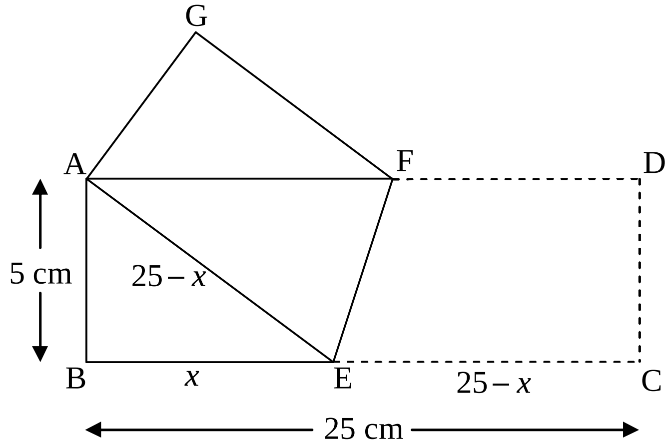
Logo, temos

$$60 + 90 = 150$$

formas de se pintar o que se deseja de modo que as três cores mencionadas estejam presentes na imagem.

QUESTÃO 4

a) Primeiramente, note que, devido à dobra, devemos ter $EC = AE$. Agora, sendo x o comprimento de $\overline{BE}$, temos que $EC = AE = 25 - x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABE, temos:

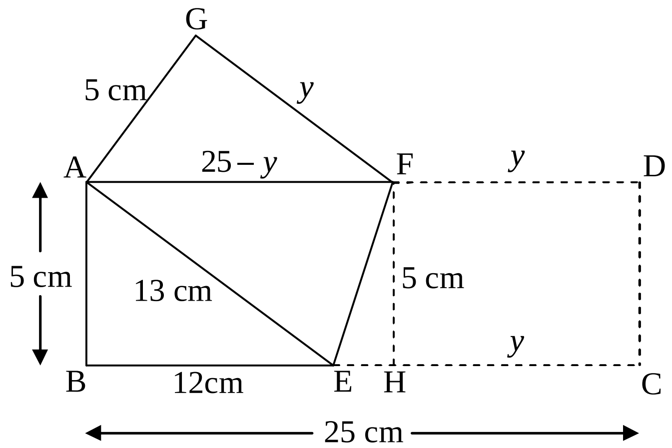


$$(25-x)^2 = 5^2 + x^2$$
$$625 - 50x + \cancel{x^2} = 25 + \cancel{x^2}$$
$$-50x = -600$$
$$\boxed{x = 12\ cm}$$

Assim, temos que $BE = 12\ cm$ e $AE = 13\ cm$.

b) Usando raciocínio análogo ao do item anterior, chamando de y o comprimento de $\overline{FD}$, temos que $FG = y$ e $AF = 25 - y$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AFG, chegaremos nos mesmos cálculos do item a e concluiremos que $y = 12\ cm$, o que implica em $AF = 13\ cm$.

Considere, agora, a reta perpendicular a $\overline{AD}$ passando pelo ponto F e seja H a intersecção desta reta com $\overline{BC}$. Temos que $FH = 5\ cm$ e $EH = 25 - 12 - 12 = 1\ cm$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EFH, temos:



$$EF^2 = 5^2 + 1^2$$
$$EF^2 = 26$$
$$\boxed{EF = \sqrt{26}\ cm}$$

c) A área do pentágono ABEFG é igual à soma das áreas dos triângulos ABE, AEF e AFG. Cada um dos triângulos ABE e AFG tem área igual a

$$S_{ABE} = S_{AFG} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ cm^2$$

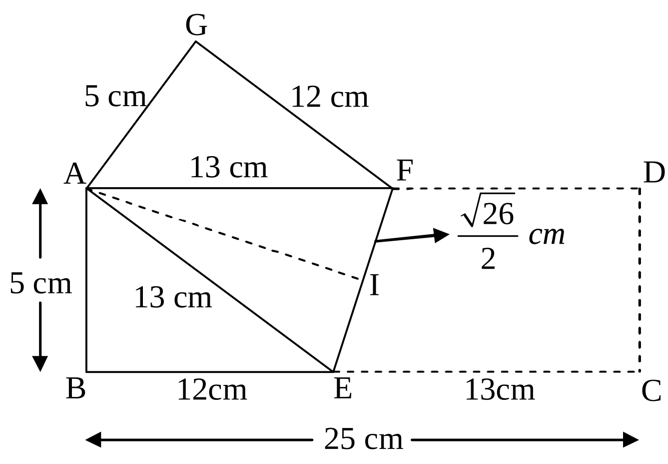
Agora, a área de AEF é facilmente encontrada se usarmos o fato de que se somarmos as áreas dos quadriláteros ABEF e AEFG obtemos a área de ABCD. Deste modo,

$$S_{ABEF} + S_{AEFG} = 5 \cdot 25$$
$$\left(\frac{12 \cdot 5}{2} + S_{AEF}\right) + \left(S_{AEF} + \frac{12 \cdot 5}{2}\right) = 125$$
$$2 \cdot S_{AEF} + 60 = 125$$
$$\boxed{S_{AEF} = \frac{65}{2}\ cm^2}$$

Logo, a área do pentágono ABEFG é igual a

$$S_{ABEFG} = 30 + 30 + \frac{65}{2} \Rightarrow \boxed{S_{ABEFG} = \frac{185}{2}\ cm^2}$$

OBS: Uma maneira alternativa de se encontrar a área do triângulo AEF pode ser feita da seguinte forma: Seja I o ponto médio de $\overline{EF}$. Neste caso temos que $IF = \frac{\sqrt{26}}{2}\ cm$. Como o triângulo AEF é isósceles, então $\overline{AI}$ é perpendicular a $\overline{EF}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AIF, temos que:



$$13^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 + AI^2$$
$$169 = \frac{26}{4} + AI^2$$
$$AI^2 = \frac{650}{4}$$
$$\boxed{AI = \frac{\sqrt{650}}{2} = \frac{5\sqrt{26}}{2} cm}$$

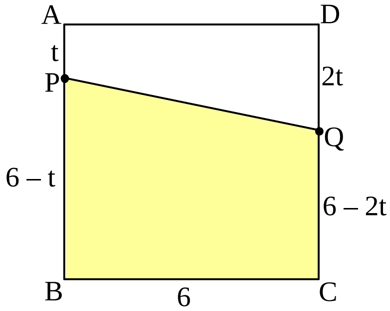
Deste modo, a área do triângulo AEF é:

$$\frac{EF \cdot AI}{2} = \frac{\sqrt{26} \cdot \frac{5\sqrt{26}}{2}}{2} = \frac{5 \cdot 26}{4} = \frac{65}{2}\ cm^2$$

QUESTÃO 5

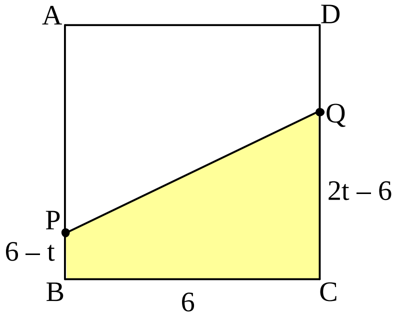
a) Primeiramente, note que, após t segundos, as formigas que andam a 1cm/s terão andado, no total, t centímetros e a formiga que anda a 2cm/s terá andado, no total, 2t centímetros.

- Para $0 \le t \le 3$, a formiga do segmento AB está indo em direção a B e a formiga do segmento CD está indo em direção a C. Neste caso, temos que PBCQ será um trapézio com as dimensões (em função de t) da figura ao lado. Então, a área, em cm², será:



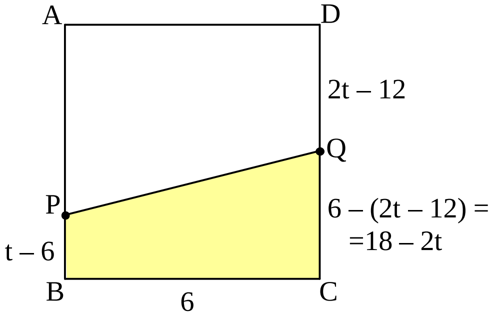
$$A(t) = \frac{((6-t)+(6-2t))\cdot 6}{2}$$
$$A(t) = (12-3t)\cdot 3$$
$$\boxed{A(t) = 9(4-t)}$$

- Para $3 \le t \le 6$, a formiga do segmento AB ainda está indo em direção a B e a formiga do segmento CD já chegou em C e está voltando em direção a D. Neste caso, temos que PBCQ será um trapézio com as dimensões (em função de t) da figura ao lado. Então, a área, em cm², será:



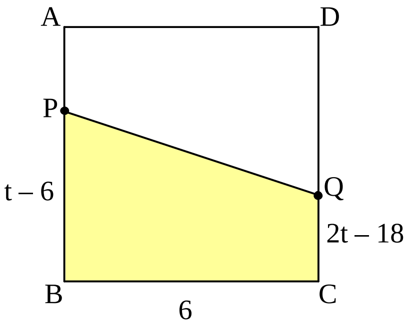
$$A(t) = \frac{((6-t)+(2t-6))\cdot 6}{2}$$
$$\boxed{A(t) = 3t}$$

- Para $6 \le t \le 9$, a formiga do segmento AB já chegou em B e está voltando em direção a A, e a formiga do segmento CD já chegou em D e está indo novamente em direção a C. Neste caso, temos que PBCQ será um trapézio com as dimensões (em função de t) da figura ao lado. Então, a área, em cm², será:



$$A(t) = \frac{((t-6)+(18-2t))\cdot 6}{2}$$
$$\boxed{A(t) = 3\cdot(12-t)}$$

- Para $9 \le t \le 12$, a formiga do segmento AB ainda está voltando em direção a A e a formiga do segmento CD já chegou em C e está voltando em direção a D. Neste caso, temos que PBCQ será um trapézio com as dimensões (em função de t) da figura ao lado. Então, a área, em cm², será:



$$A(t) = \frac{((t-6)+(2t-18))\cdot 6}{2}$$
$$A(t) = (3t-24)\cdot 3$$
$$\boxed{A(t) = 9\cdot(t-8)}$$

Portanto, temos que:

$$\boxed{A(t)=\begin{cases}9\cdot(4-t) & \text{, se } 0\le t\le 3\\ 3t & \text{, se } 3\le t\le 6\\ 3\cdot(12-t) & \text{, se } 6\le t\le 9\\ 9\cdot(t-8) & \text{, se } 9\le t\le 12\end{cases}}$$

b) Para $0\le t\le 6$, a formiga do segmento CG está subindo em direção a G e, no tempo t, está a t centímetros de altura da base PBCQ. Assim,

- Para $0\le t\le 3$, temos

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot(4-t)\cdot t \Rightarrow \boxed{V(t)=3t\cdot(4-t)}$$

- Para $3\le t\le 6$, temos

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot 3t\cdot t \Rightarrow \boxed{V(t)=t^2}$$

Para $6\le t\le 12$, a formiga do segmento CG já chegou a G e está descendo em direção a C e, no tempo t, está a $12-t$ centímetros de altura da base. Assim,

- Para $6\le t\le 9$, temos

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(12-t)\cdot(12-t) \Rightarrow \boxed{V(t)=(12-t)^2}$$

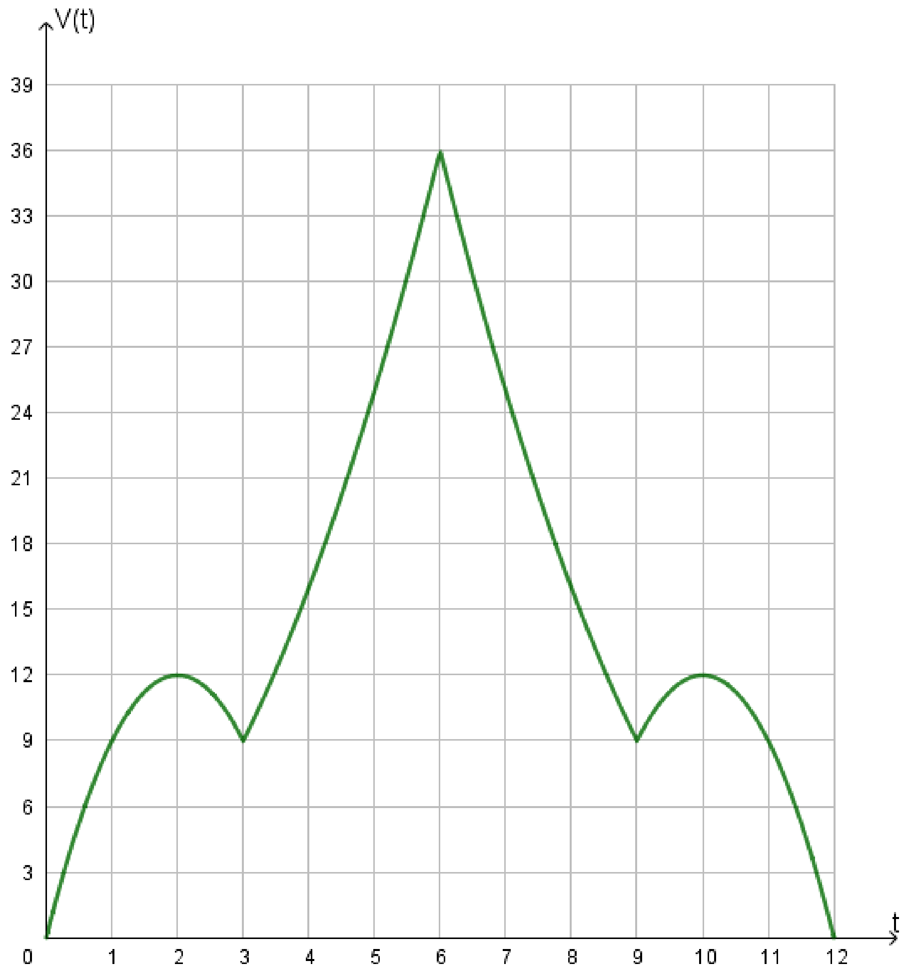
- Para $9\le t\le 12$, temos

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot(t-8)\cdot(12-t) \Rightarrow \boxed{V(t)=3(t-8)(12-t)}$$

Portanto, temos que $V(t)$, em cm³, é dado por:

$$\boxed{V(t)=\begin{cases}3t\cdot(4-t) & \text{, se } 0\le t\le 3\\ t^2 & \text{, se } 3\le t\le 6\\ (12-t)^2 & \text{, se } 6\le t\le 9\\ 3(t-8)(12-t) & \text{, se } 9\le t\le 12\end{cases}}$$

c) O gráfico de $V(t)$ será composto por quatro arcos de parábolas, como mostrado abaixo.



d) Pelo gráfico, podemos perceber que o maior volume possível é igual a $36cm^3$, ocorrendo após 6 segundos do instante inicial.