Questão proposta por: Carlos Eduardo de Paula Abreu	
Instituto: IFSULDEMINAS – Campus Três Corações	

QUESTÃO 06

A Olimpíada de Matemática dos Institutos Federais (OMIF) teve sua primeira edição no ano de 2018, e agora, em 2020, realizará sua terceira edição. Empolgado com a OMIF e motivado pelos números 2018, 2019 e 2020, um determinado professor de matemática do Instituto Federal resolveu propor alguns desafios para a comunidade acadêmica que acompanha a OMIF pelas redes sociais. Para interagir, resolva os quatro desafios a seguir e, se possível, poste seus comentários.

a) Quantos divisores positivos possui cada um dos números 2018, 2019 e 2020?
b) Sendo N = 2018 x 2019 x 2020, determine o número de divisores pares positivos que N possui.
c) Determine os dois menores números naturais que, ao serem divididos por 2018, 2019 ou 2020, deixam resto 20.
d) Quantos números compreendidos entre 20 e 2020 são múltiplos de 18 ou de 20?

Resposta

a) Uma das formas de se calcular a quantidade de divisores de um número natural, consiste em realizar sua decomposição em números primos e, posteriormente, fazer uma análise dos expoentes de cada fator. Por exemplo, se d é um divisor de $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$, então os únicos fatores primos de d são 2, 5 e 101, ou seja, $d = 2^x \times 5^y \times 101^z$. O número x deve ser um número inteiro não negativo menor ou igual a 2, que é o expoente do fator primo 2 na fatoração de 2020. O mesmo acontece para y e z, que não podem ser maiores que 1. Assim, temos que $x \in \{0,1,2\}$, $y \in \{0,1\}$ e $z \in \{0,1\}$. Deste modo, 2020 possui os seguintes divisores:

$2^0 \times 5^0 \times 101^0 = 1;$	$2^0 \times 5^0 \times 101^1 = 101;$
$2^1 \times 5^0 \times 101^0 = 2;$	$2^1 \times 5^0 \times 101^1 = 202;$
$2^2 \times 5^0 \times 101^0 = 4;$	$2^2 \times 5^0 \times 101^1 = 404;$
$2^0 \times 5^1 \times 101^0 = 5;$	$2^0 \times 5^1 \times 101^1 = 505;$
$2^1 \times 5^1 \times 101^0 = 10;$	$2^1 \times 5^1 \times 101^1 = 1010;$
$2^2 \times 5^1 \times 101^0 = 20;$	$2^2 \times 5^1 \times 101^1 = 2020.$

Note que o enunciado não pede para descrever todos os divisores positivos, como foi feito, mas sim, a quantidade existente. Para isto, bastava verificar os possíveis valores de x, y e z, e realizar o princípio multiplicativo. Os divisores de 2020 serão da forma $2^x \times 5^y \times 101^z$, com $x \in \{0,1,2\}$, $y \in \{0,1\}$ e $z \in \{0,1\}$. Portanto, temos $3 \times 2 \times 2 = 12$ divisores.

De forma análoga, fazemos para $2018 = 2 \times 1009$ e $2019 = 3 \times 673$, e então, concluímos que existem $2 \times 2 = 4$ divisores para cada um deles.

b) Temos que

$$\begin{aligned} N &= 2018 \times 2019 \times 2020 \\ &= 2 \times 1009 \times 3 \times 673 \times 2^2 \times 5 \times 101 \\ &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 101 \times 673 \times 1009 \end{aligned}$$

e sabemos que os divisores pares de N possuem o número 2 na fatoração. Assim, os divisores pares de N são da forma $2^u \times 3^v \times 5^w \times 101^x \times 673^y \times 1009^z$, com $u \in \{1,2,3\}$, $v \in \{0,1\}$, $w \in \{0,1\}$, $x \in \{0,1\}$, $y \in \{0,1\}$ e $z \in \{0,1\}$. Portanto, temos
$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ divisores.

c) O primeiro número natural que possui resto 20 na divisão por 2018, 2019 ou 2020, é o próprio número 20. O segundo número, deve ser obtido calculando m.m.c.(2018, 2019, 2020) + 20, ou seja, $2^2 \times 3 \times 5 \times 101 \times 673 \times 1009 + 20 = 4\,115\,085\,440$.

d) Para determinar quantos múltiplos positivos de 18 são maiores que 0 e menores ou iguais a 2020, basta dividir 2020 por 18 e tomar a parte inteira. Assim, existem 112 múltiplos de 18 entre 0 e 2020. Entretanto, devemos subtrair o múltiplo 18, já que 18 não está no intervalo desejado. Então, existem 111 múltiplos de 18 no intervalo compreendido entre 20 e 2020. Utilizando do mesmo raciocínio, a divisão de 2020 por 20 é igual a 101. Porém, devemos retirar os números 20 e 2020, pois eles também não fazem parte do intervalo. Desta forma, existem 99 múltiplos de 20 no intervalo compreendido entre 20 e 2020. Contudo, existem alguns múltiplos de 18 e de 20 compreendidos no intervalo que são iguais. Esses múltiplos são identificados determinando o m.m.c.(18, 20) = 180 e dividindo 2020 por 180, de onde obtemos 11 números. Logo, a quantidade de números compreendidos entre 20 e 2020 que são múltiplos de 18 ou de 20 é 111 + 99 – 11 = 199.