

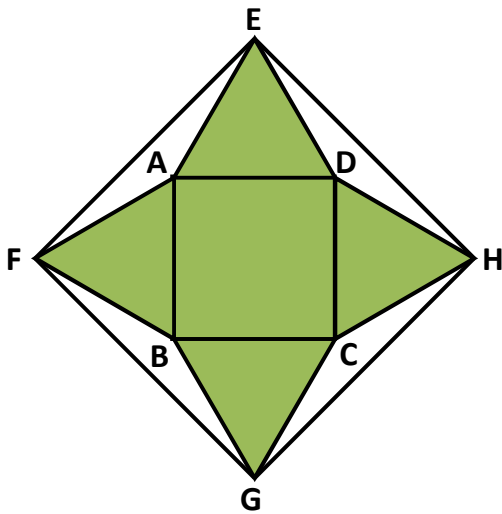


Questão proposta por: Felipe Mascagna Bittencourt Lima

Instituto: IFSP – Campus São João da Boa Vista

QUESTÃO 01

Na figura, o quadrilátero ABCD é um quadrado de lado de comprimento 1 e os triângulos ADE, ABF, BCG e CDH são equiláteros.



A área do quadrilátero EFGH é:

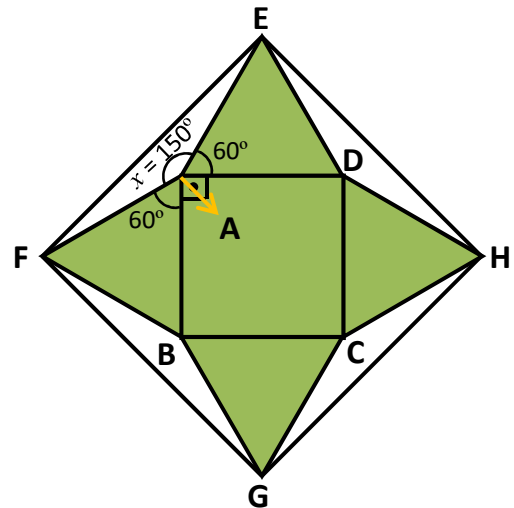
- A) $1 + \sqrt{3}$
- B) $2 + \sqrt{3}$
- C) $3 + \sqrt{3}$
- D) $1 + 2\sqrt{3}$
- E) $2 + 4\sqrt{3}$

GABARITO: B

RESOLUÇÃO:

Como o lado do quadrado mede a 1, os lados de todos os triângulos equiláteros também medem 1. Agora, lembrando-se que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e que os ângulos internos de um quadrado medem 90° , chamando o ângulo \widehat{EAF} de x , temos que:

$$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 150^\circ$$



Vamos apresentar dois modos de seguir a resolução partir daqui:

1º Modo:

A área do triângulo AEF é

$$A_{AEF} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin(150^\circ)}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Note que os triângulos BFG, CGH e DEH são congruentes ao triângulo AEF e, assim,



possuem a mesma área. Logo, a área do quadrilátero EFGH é:

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} + 4 \cdot A_{\text{Triâng. Equil.}} + 4 \cdot A_{AEF}$$

$$A_{EFGH} = 1^2 + 4 \cdot \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boxed{A_{EFGH} = 2 + \sqrt{3}}$$

2º Modo:

Como o triângulo AEF é isósceles, os ângulos \widehat{AEF} e \widehat{AFE} têm a mesma medida e são tais que a soma dos ângulos internos do triângulo AEF é 180° . Deste modo, cada um deles mede 15° .

Note que os triângulos BFG, CGH e DEH são congruentes ao triângulo AEF. Assim, o ângulo \widehat{FEH} mede $15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, o mesmo acontecendo com os demais ângulos internos do quadrilátero EFGH. Também pela congruência mencionada, os lados do quadrilátero EFGH têm, todos, o mesmo comprimento.

Assim, EFGH é um quadrado. Chamando de L o comprimento de seu lado, temos, pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo AEF:

$$L^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ$$

$$L^2 = 2 - 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\boxed{L^2 = 2 + \sqrt{3}}$$

Como o quadrilátero EFGH é um quadrado, sua área é igual a L^2 . Logo:

$$\boxed{A_{AFGH} = 2 + \sqrt{3}}$$