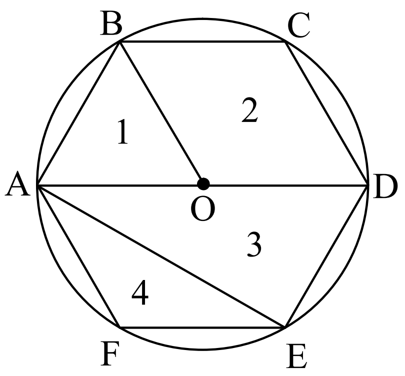
QUESTÃO 03

Na segunda fase da OMIF 2018, foram realizadas várias oficinas e uma delas abordava a geometria com o uso do parafuso sextavado. Carlos, um bom aluno, que participou da referida oficina, resolveu brincar um pouco com o que tinha aprendido. Ele utilizou compasso, régua e lápis para confeccionar o desenho mostrado abaixo e, então, calculou a área das figuras 1, 2, 3 e 4. Sabendo que o diâmetro da circunferência desenhada tem comprimento igual a 4 cm, que o ponto O é o centro da circunferência e que o hexágono inscrito na circunferência é regular, o produto das áreas das figuras 1, 2, 3 e 4 é, numericamente, igual a:

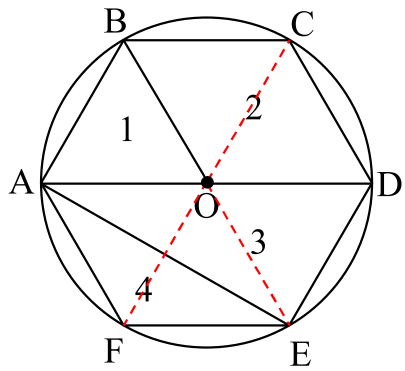


A) $6\sqrt{3}$
B) $12\sqrt{3}$
C) 24
D) 36
E) 108

GABARITO: D

RESOLUÇÃO

Traçando-se os segmentos $\overline{OC}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ sobre o desenho de Carlos, é possível observar o hexágono ABCDEF dividido em seis triângulos equiláteros congruentes: AOB, BOC, COD, DOE, EOF e FOA.



Como a circunferência tem diâmetro de comprimento igual a 4 cm, então seu raio mede 2 cm. Assim, cada um dos triângulos equiláteros mencionados acima tem lados de comprimento igual a 2 cm e, portanto, área igual a

$$\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 as áreas das figuras 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Note que S_1 corresponde à área do triângulo equilátero AOB e que S_2 corresponde à soma das áreas dos triângulos equiláteros BOC e COD. Logo,

$$S_1 = \sqrt{3}\ \text{cm}^2 \qquad \text{e}$$

$$S_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Observe, agora, que AOEF é um losango, já que todos os seus lados têm o mesmo comprimento (2 cm). Sua área corresponde à soma das áreas dos triângulos equiláteros EOF e FOA. Como o segmento $\overline{AE}$ é uma das diagonais deste losango, então S_4 correspondente à metade da área de AOEF. Logo,

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Para finalizar, note que S_3 corresponde à soma da área do triângulo equilátero DOE com metade da área do losango AOEF. Assim,

$$S_3 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Portanto, o produto das áreas das figuras 1, 2, 3 e 4 é, numericamente, igual a:

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 &= \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 36 \end{aligned}$$