OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

OMIF 2023

Resolução Comentada da Prova da 2ª Fase

QUESTÃO 01

Matheus está participando de um jogo cuja regra principal consiste em escrever um número inteiro em cada jogada, formando uma sequência numérica. De acordo com essa regra, Matheus pode escrever qualquer número inteiro positivo em sua primeira jogada. Mas, a partir da segunda, ele deve escrever:

- O dobro do número escrito na jogada anterior, menos 3, se o número da jogada anterior for par.
- O triplo do número escrito na jogada anterior, mais 5, se o número da jogada anterior for ímpar.

Por exemplo, se Matheus escrever o número 10 em sua primeira jogada, a sequência que ele formará é:

$$10 \rightarrow 17 \rightarrow 56 \rightarrow 109 \rightarrow 332 \rightarrow 661 \rightarrow 1988 \rightarrow \ldots$$

a) (4 pontos) Se Matheus escrever o número 1 em sua primeira jogada, qual é o número mais próximo de 2024 que deverá aparecer na sequência numérica?

Se Matheus escrever o número 1 em sua primeira jogada, a sequência que ele deve formar é:

$$1 \to 8 \to 13 \to 44 \to 85 \to 260 \to 517 \to 1556 \to 3109 \to \ldots$$

pois

$$1 \xrightarrow[\text{Triplica e soma 5}]{\text{É ímpar}} 8 \xrightarrow[\text{Dobra e subtrai 3}]{\text{É par}} 13 \xrightarrow[\text{Triplica e soma 5}]{\text{É ímpar}} 44 \xrightarrow[\text{Dobra e subtrai 3}]{\text{É par}} 85 \xrightarrow[\text{Triplica e soma 5}]{\text{É ímpar}} 260 \xrightarrow[\text{Dobra e subtrai 3}]{\text{É par}}$$

$$\longrightarrow 517 \xrightarrow[\text{Triplica e soma 5}]{\text{É ímpar}} 1556 \xrightarrow[\text{Dobra e subtrai 3}]{\text{É par}} 3109 \longrightarrow \bullet\bullet\bullet$$

Note que essa sequência é crescente. Logo, pode-se afirmar que os números mais próximos de 2024 que aparecem nela são 1556 e 3109. Como $|2024-1556| = 468 < 1085 = |2024-3109|$, conclui-se que, se Matheus escrever o número 1 em sua primeira jogada, o número mais próximo de 2024 que deverá aparecer na sequência numérica é 1556.

b) (5 pontos) Qual é o menor número que Matheus pode escrever em sua primeira jogada de modo que, seguindo a regra corretamente, o número 2024 apareça na sequência de números escritos?

Primeiramente, perceba que, nesse jogo, a paridade dos números da sequência é alternada. Desse modo, um número par é sempre sucedido por um ímpar e um número ímpar é sempre sucedido por um par. De fato, qualquer número par $2n$ dessa sequência ($n \in \mathbb{Z}$), deve ser sucedido por $2 \cdot (2n) - 3 = 4n - 3 = 2 \cdot (2n - 2) + 1 = 2k_1 + 1$, que é um número ímpar, já que $k_1 \in \mathbb{Z}$. Analogamente, qualquer número ímpar $2n + 1$ dessa sequência ($n \in \mathbb{Z}$) deve ser sucedido por $3 \cdot (2n + 1) + 5 = 6n + 8 = 2 \cdot (3n + 4) = 2k_2$, que é um número par, já que $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Desse modo, se o número 2024 não foi escrito na primeira jogada desse jogo, então ele só poderia ter sido gerado a partir de um número ímpar *x* tal que $3x + 5 = 2024$. Assim:

$$3x + 5 = 2024 \Rightarrow \boxed{x = 673}$$

Da mesma maneira, se o número 673 não foi escrito na primeira jogada, então ele só poderia ter sido gerado a partir de um número par *y* tal que $2y - 3 = 673$. Assim:

$$2y - 3 = 673 \Rightarrow \boxed{y = 338}$$

Por sua vez, se o número 338 não foi escrito na primeira jogada, então ele só poderia ter sido gerado a partir de um número ímpar *z* tal que $3z + 5 = 338$. Assim:

$$3z + 5 = 338 \Rightarrow \boxed{z = 111}$$

Por fim, se o número 111 não tivesse sido escrito na primeira jogada, ele só poderia ter sido gerado a partir de um número par *w* tal que $2w - 3 = 111$:

$$2w - 3 = 111 \Rightarrow \boxed{\xcancel{w = 57}} \rightarrow \text{Contradição!}$$

Note que há uma contradição, pois w deveria ser par para que o número 111 pudesse ser gerado. Logo, o número 111 só pode fazer parte da sequência se ele for o primeiro. Portanto, este é o menor número que Matheus pode escrever em sua primeira jogada de modo que, seguindo a regra corretamente, o número 2024 apareça na sequência de números escritos. A sequência seria:

$$111 \rightarrow 338 \rightarrow 673 \rightarrow 2024 \rightarrow \dots$$

c) (5 pontos) Mostre que, seguindo a regra corretamente, é impossível Matheus escrever um múltiplo de 3 na terceira jogada.

Inevitavelmente, Matheus deve escrever ou um número par ou um número ímpar na primeira jogada.

Se o número da primeira jogada for par, então ele é igual a $2n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, o número que ele escreverá na segunda jogada é o número ímpar $2 \cdot (2n) - 3 = 4n - 3$ e o número que ele escreverá na terceira jogada será o número $3 \cdot (4n - 3) + 5 = 12n - 4 = 3 \cdot (4n - 2) + 2 = 3k_1 + 2$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, que não é um múltiplo de 3 já que deixa resto 2 na divisão por 3.

Se o número da primeira jogada for ímpar, então ele é igual a $2n - 1$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, o número que ele escreverá na segunda jogada é o número par $3 \cdot (2n - 1) + 5 = 6n + 2$ e o número que ele escreverá na terceira jogada será o número $2 \cdot (6n + 2) - 3 = 12n + 1 = 3 \cdot (4n) + 1 = 3k_2 + 1$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, que não é um múltiplo de 3 já que deixa resto 1 na divisão por 3.

Logo, seguindo a regra corretamente, é impossível Matheus escrever um múltiplo de 3 na terceira jogada.

d) (6 pontos) Existe uma versão deste jogo que altera, em partes, a regra da construção da sequência numérica. Nessa versão, Matheus também pode escrever qualquer número inteiro positivo em sua primeira jogada. Porém, a partir da segunda, ele deve escrever:

- O dobro do número escrito na jogada anterior, menos 3, se o número da jogada anterior for par e menor do que 100.
- O triplo do número escrito na jogada anterior, mais 5, se o número da jogada anterior for ímpar e menor do que 100.
- A parte inteira de um décimo do número escrito na jogada anterior, se o número da jogada anterior for maior ou igual a 100.

Por exemplo, se Matheus escrever o número 5 em sua primeira jogada nessa versão do jogo, a sequência que ele deve formar é: $5 \to 20 \to 37 \to 116 \to 11 \to 38 \to 73 \to 224 \to 22 \to 41 \to \ldots$.
Assim, se Matheus escrever o número 16 em sua primeira jogada nessa versão do jogo, que número ele deverá escrever em sua 2024ª jogada?

Observe o esquema abaixo, que mostra os primeiros 15 termos da sequência que Matheus formará se escrever o número 16 em sua primeira jogada nessa versão do jogo:

8º elemento da sequência

$16 \to 29 \to 92 \to 181 \to 18 \to 33 \to 104 \to \boxed{10 \to 17 \to 56 \to 109} \to \boxed{10 \to 17 \to 56 \to 109} \to \ldots$

12º elemento da sequência

Note que, a partir do oitavo elemento, a sequência apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de 4 números. Os termos que estão numa posição igual a um múltiplo de 4, com exceção do quarto termo, são todos iguais a 10. Desta forma, como 2024 é um múltiplo de 4, o número que Matheus deverá escrever em sua 2024ª jogada é 10.

QUESTÃO 02

Quatro pares de irmãos, todos estudantes de uma instituição federal, reuniram-se para jogar tênis de mesa. Desses oito alunos, exatamente quatro são mulheres (Alice, Bianca, Carla e Daniela) e os outros quatro são homens (Evandro, Francisco, Gabriel e Hugo), sendo cada par de irmãos composto por um homem e uma mulher. Todas as partidas ocorreram em uma única mesa e eles combinaram de respeitar as seguintes regras:

- Regra 1: Cada partida só pode ser realizada entre um homem e uma mulher.
- Regra 2: Irmãos não podem jogar entre si.
- Regra 3: Nenhuma pessoa pode jogar duas partidas seguidas.

As cinco primeiras partidas já aconteceram e sabe-se que:

- Na primeira partida, Bianca jogou contra Evandro.
- Na segunda partida, Alice jogou contra o irmão de Daniela.
- Na terceira partida, a irmã de Evandro jogou contra o irmão de Alice.
- Na quarta partida, Bianca jogou contra Francisco.
- Na quinta partida, a irmã de Gabriel jogou contra Evandro.

a) (4 pontos) Com base nas informações do texto, estaria correto afirmar que a terceira partida foi disputada entre Bianca e Gabriel? Além disso, seria possível Carla enfrentar Evandro em alguma partida seguinte? Justifique cada resposta.

A terceira partida NÃO pode ter sido disputada entre Bianca e Gabriel porque Bianca jogou na quarta partida e a Regra 3 não permite que uma pessoa jogue duas partidas seguidas.

Também NÃO é possível Carla enfrentar Evandro em alguma partida seguinte porque eles são irmãos e a Regra 2 não permite que irmãos joguem entre si. Para concluir que Carla e Evandro são irmãos, observe que, pelas informações do texto, Evandro tem uma irmã, podendo, a princípio, ser Alice, Bianca, Carla ou Daniela. Como Evandro jogou contra Bianca na primeira partida, então, pela Regra 2, Evandro não pode ser irmão de Bianca. Além disso, como Evandro jogou na primeira partida e o irmão de Daniela jogou na segunda, então Evandro não pode ser o irmão de Daniela de acordo com a Regra 3. Por fim, como Alice jogou na segunda partida e a irmã de Evandro jogou na partida seguinte, então Alice não pode ser a irmã de Evandro, também de acordo com a Regra 3. Assim, Evandro não é irmão de Alice, nem de Bianca e nem de Daniela. Logo, ele é irmão de Carla.

b) (8 pontos) Complete a tabela abaixo, identificando cada par de irmãos, e escreva quais foram os argumentos lógicos utilizados para se chegar a essas conclusões.

Irmã	Irmão
Alice	Gabriel
Bianca	Hugo
Carla	Evandro
Daniela	Francisco

Para completar a tabela acima, os seguintes argumentos lógicos podem ser usados:

- Pelos argumentos do item anterior, sabe-se que Carla é irmã de Evandro.
- Como Bianca jogou contra Evandro e contra Francisco, então, pela Regra 2, Bianca não pode ser irmã nem de Evandro e nem de Francisco. Além disso, como Bianca jogou na quarta partida e a irmã de Gabriel jogou na partida seguinte, então Bianca não pode ser a irmã de Gabriel de acordo com a Regra 3. Assim, como Bianca não é irmã de Evandro, nem de Francisco e nem de Gabriel, ela só pode ser irmã de Hugo.
- Como cada homem tem apenas uma irmã e vice-versa, Alice não é irmã nem de Evandro e nem de Hugo, pois já sabemos que eles são irmãos de Carla e Bianca, respectivamente. Além disso, como o irmão de Alice jogou na terceira partida e Francisco jogou na partida seguinte, então o irmão de Alce não pode ser Francisco de acordo com a Regra 3. Assim, como Alice não é irmã de Evandro, nem de Hugo e nem de Francisco, ela só pode ser irmã de Gabriel.
- Por fim, por eliminação, Daniela é irmã de Francisco.

c) (8 pontos) Os estudantes decidem que vão realizar exatamente oito partidas no total e, para definir quais serão os competidores de cada uma das três partidas finais, resolvem fazer um sorteio. Para isso, cada um dos oito estudantes escreve seu nome em um cartão e o coloca em uma urna, observando que os cartões eram idênticos inicialmente. Em seguida, um deles retira, de maneira aleatória, dois cartões dessa urna ao mesmo tempo. Eles combinam que, se os dois nomes retirados respeitarem as três regras colocadas no início, a próxima partida deve acontecer entre eles e os cartões devem ser devolvidos à urna. Caso contrário, eles devem devolver os cartões à urna e fazer um novo sorteio. Esse procedimento será realizado até que as três partidas finais tenham ocorrido. Diante dessas informações, determine a probabilidade de os oito estudantes terem jogado exatamente a mesma quantidade de vezes ao final das oito partidas.

De acordo com as informações do texto e da tabela preenchida no item anterior, sabe-se que as cinco primeiras partidas ocorreram entre:

1ª Partida:	Bianca	x	Evandro
2ª Partida:	Alice	x	Francisco
3ª Partida:	Carla	x	Gabriel
4ª Partida:	Bianca	x	Francisco
5ª Partida:	Alice	x	Evandro

Para que os oito estudantes joguem exatamente a mesma quantidade de vezes ao final das oito partidas, é necessário que cada um deles jogue exatamente duas vezes pois, em oito partidas, tem-se 16 competidores e, em oito pessoas, cada uma deve jogar $16/8 = 2$ vezes.

Observe que, nas cinco primeiras partidas, Alice, Bianca, Evandro e Francisco já jogaram duas partidas cada, Carla e Gabriel já jogaram uma partida cada, e Daniela e Hugo ainda não jogaram. Assim, para que os oito estudantes joguem exatamente a mesma quantidade de vezes ao final das oito partidas, é necessário que Carla e Gabriel joguem mais uma partida cada e que Daniela e Hugo joguem duas partidas cada. Como, pela Regra 3, nenhuma pessoa pode jogar duas partidas seguidas, é necessário que Daniela e Hugo joguem a sexta e a oitava partidas. Deste modo, a sétima partida deve ocorrer entre Carla e Gabriel. Essa é a única configuração que garante que todos joguem exatamente duas vezes.

6ª Partida:	Daniela	x	Hugo
7ª Partida:	Carla	x	Gabriel
8ª Partida:	Daniela	x	Hugo

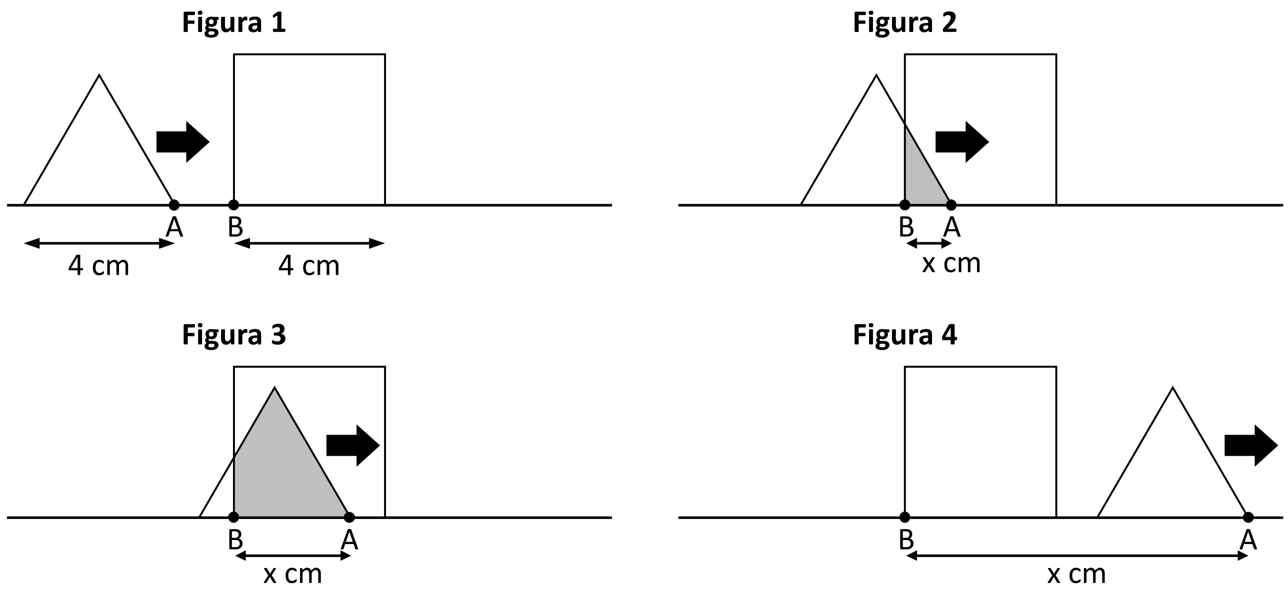
No sorteio que eles vão fazer, cada partida tem 7 possíveis confrontos que seguem as três regras colocadas no início. Isso é verdade pois cada partida pode ser jogada por apenas uma de três mulheres (todas menos a que jogou a partida anterior) contra um homem. Duas das três mulheres podem jogar contra dois homens (todos menos o seu irmão e o que jogou a partida anterior) e uma das três mulheres pode jogar contra três homens (todos menos o seu irmão, que coincidentemente jogou a partida anterior também). Isso resulta em $2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$ possibilidades de confronto em cada partida. A sexta partida, por exemplo, poderia ser realizada entre [Bianca e Gabriel], [Bianca e Francisco], [Carla e Gabriel], [Carla e Francisco], [Carla e Hugo], [Daniela e Gabriel] ou [Daniela e Hugo].

Logo, a probabilidade de os oito estudantes terem jogado exatamente a mesma quantidade de vezes ao final das oito partidas é:

$$P = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{343}}$$

QUESTÃO 03

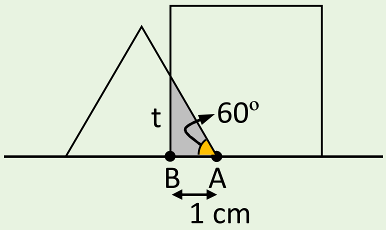
A Figura 1, abaixo, mostra um triângulo equilátero e um quadrado apoiados sobre uma reta horizontal. Os dois polígonos são coplanares, todos os seus lados medem 4 cm e A e B são dois de seus vértices. Em um determinado momento, o triângulo começa a se deslocar para a direita, enquanto o quadrado permanece fixo na mesma posição. As Figuras 2, 3 e 4 ilustram alguns instantes desse deslocamento, com x representando a distância, em cm, entre os vértices A e B quando A está à direita de B.



Para cada valor de x, com $0 \leq x \leq 10$, seja $A(x)$ a área, em cm², da região comum aos dois polígonos, exemplificada e destacada em cinza nas figuras 2 e 3.

a) (6 pontos) Calcule $A(1)$, $A(3)$ e a área máxima da região comum aos dois polígonos.

Observe a figura abaixo, que ilustra o instante em que $x = 1$ cm. A região comum aos dois polígonos é um triângulo retângulo com base medindo 1 cm e altura medindo t. Lembrando que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°, pode-se calcular $A(1)$ da seguinte maneira:



$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{t}{1}$$

$$\sqrt{3} = \frac{t}{1}$$

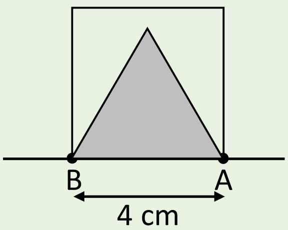
$$\boxed{t = \sqrt{3}\ \text{cm}}$$

$$A(1) = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$A(1) = \frac{1 \cdot t}{2}$$

$$\boxed{A(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2}$$

A área máxima da região comum aos dois polígonos acontece quando o triângulo está inteiramente no interior do quadrado, ou seja, quando $x = 4$ cm. Neste caso, a área da região comum é igual à área do triângulo.

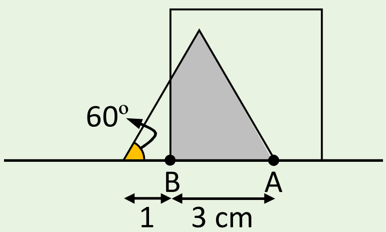


$$A_{Máx} = A_{Triângulo\ Equilátero} = \frac{Lado^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{Máx} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A_{Máx} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$

Por fim, observe a figura abaixo, que ilustra o instante em que $x = 3$ cm. A área da região comum aos dois polígonos pode ser calculada pela diferença entre área do triângulo equilátero e a área do triângulo retângulo que ficou para fora do quadrado, que é congruente ao triângulo cuja área foi calculada para $A(1)$. Dessa forma, tem-se que:



$$A(3) = A_{Máx} - A(1)$$

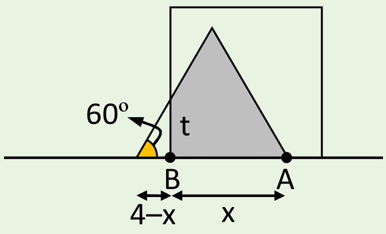
$$A(3) = 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A(3) = \frac{7\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2}$$

b) (6 pontos) Para que valores de x a área da região comum aos dois polígonos é igual a $\left(24-10\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$?

Utilize, se necessário, que $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

Observe a figura abaixo, que ilustra o instante em que $A(x)=\left(24-10\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$ para $x<4\text{ cm}$.



$$\text{tg}\,60^\circ=\frac{t}{4-x}$$

$$\sqrt{3}=\frac{t}{4-x}$$

$$\boxed{t=(4-x)\cdot\sqrt{3}\text{ cm}}$$

Nesse instante, tem-se:

$$A(x)=A_{Máx}-A_{\text{Triângulo Retângulo fora do quadrado}}$$

$$24-10\sqrt{3}=4\sqrt{3}-\frac{(4-x)\cdot(4-x)\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{(4-x)^2\cdot\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}-24$$

$$(4-x)^2=\frac{28\sqrt{3}-48}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{28\cdot3-48\sqrt{3}}{3}$$

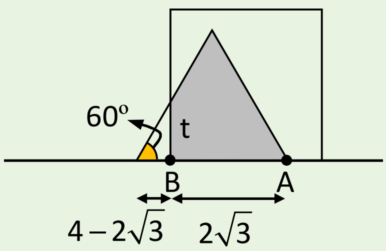
$$(4-x)^2=28-16\sqrt{3}=4\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)$$

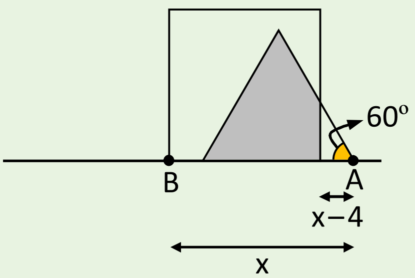
$$4-x=\pm\sqrt{4\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)}=\pm2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=\pm\left(4-2\sqrt{3}\right)$$

$4-x=4-2\sqrt{3}$ ou $4-x=-4+2\sqrt{3}$

$\boxed{x=2\sqrt{3}\text{ cm}}$ $\qquad$ $\underbrace{\cancel{x=\left(8-2\sqrt{3}\right)\text{ cm}}}_{\text{Estamos considerando } x<4\text{ cm}}$

Por simetria, pode-se determinar outro valor de x para o qual $A(x)=\left(24-10\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$, considerando, agora, $x>4\text{ cm}$. A primeira figura abaixo apresenta a região comum aos dois polígonos para o valor de x já encontrado ($x=2\sqrt{3}\text{ cm}$), enquanto a segunda apresenta a mesma área para a região comum aos dois polígonos, com certa simetria com relação à primeira. Como essas figuras são simétricas, deve-se ter:



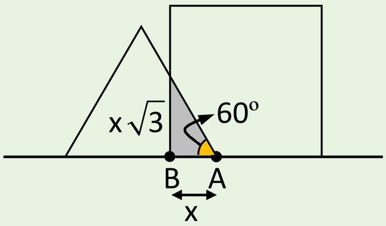


$$x-4=4-2\sqrt{3}$$

$$\boxed{x=\left(8-2\sqrt{3}\right)\text{ cm}}$$

c) (8 pontos) Para $0 \le x \le 10$, escreva as expressões de $A(x)$ em função de x. Observe que essa função deve ser definida por mais de uma sentença.

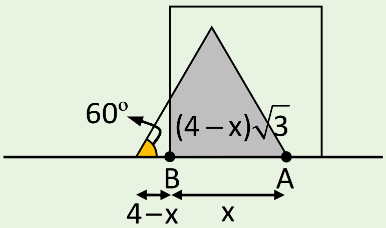
Para $0 \le x < 2$, a região comum aos dois polígonos é um triângulo retângulo com base medindo x e altura medindo $x\sqrt{3}$.



$$A(x) = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}}$$

Para $2 \le x < 4$, a área da região comum aos dois polígonos pode ser calculada pela diferença entre área do triângulo equilátero e a área do triângulo retângulo que fica para fora do quadrado, que tem base medindo $(4-x)$ e altura medindo $(4-x)\sqrt{3}$.

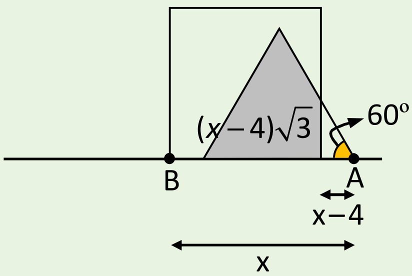


$$A(x) = 4\sqrt{3} - \frac{(4-x)\cdot(4-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$A(x) = \frac{8\sqrt{3} - (4-x)\cdot(4-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{(-x^2+8x-8)\sqrt{3}}{2}}$$

Para $4 \le x < 6$, a área da região comum aos dois polígonos também pode ser calculada pela diferença entre área do triângulo equilátero e a área do triângulo retângulo que fica para fora do quadrado, que tem base medindo $(x-4)$ e altura medindo $(x-4)\sqrt{3}$.

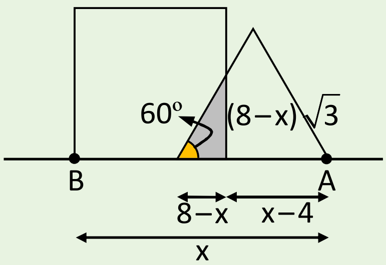


$$A(x) = 4\sqrt{3} - \frac{(x-4)\cdot(x-4)\sqrt{3}}{2}$$

$$A(x) = \frac{8\sqrt{3} - (x-4)\cdot(x-4)\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{(-x^2+8x-8)\sqrt{3}}{2}}$$

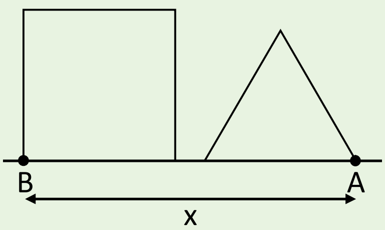
Para $6 \le x < 8$, a região comum aos dois polígonos é um triângulo retângulo com base medindo $4-(x-4) = 8-x$ e altura medindo $(8-x)\sqrt{3}$.



$$A(x) = \frac{(8-x)\cdot(8-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{(x^2-16x+64)\sqrt{3}}{2}}$$

Por fim, para $8 \le x \le 10$, não há região comum aos dois polígonos.

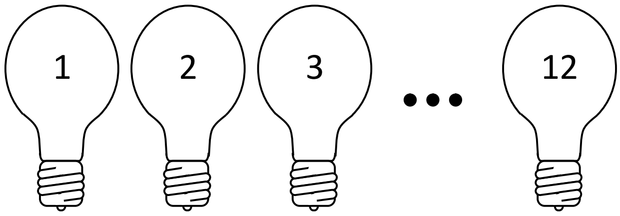


$$\boxed{A(x) = 0}$$

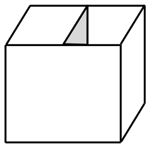
Logo, $A(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} & \text{, se } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{(-x^2+8x-8)\sqrt{3}}{2} & \text{, se } 2 \le x < 6 \\ \dfrac{(x^2-16x+64)\sqrt{3}}{2} & \text{, se } 6 \le x < 8 \\ 0 & \text{, se } 8 \le x \le 10 \end{cases}$

QUESTÃO 04

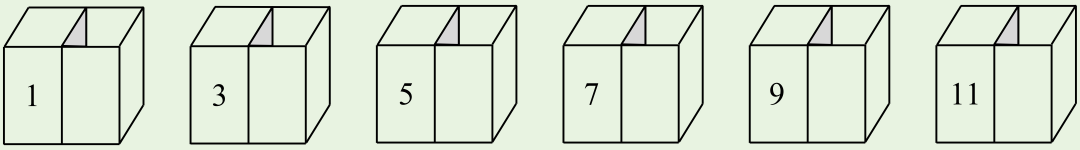
Em um dia de folga, Aristóteles encontra 12 lâmpadas perfeitas guardadas há muito tempo no porão de sua casa. Elas estão numeradas de 1 a 12 e, quando estão apagadas, são todas idênticas, exceto pela numeração nelas estampada.



a) (5 pontos) Aristóteles decide colocar essas lâmpadas em 6 caixas idênticas que comportam exatamente duas lâmpadas cada, conforme ilustração ao lado. De quantas maneiras diferentes as 12 lâmpadas podem ficar acomodadas nas 6 caixas de modo que cada caixa contenha exatamente uma lâmpada com numeração ímpar e uma com numeração par? Considere que a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante.



Aristóteles possui exatamente seis lâmpadas com numeração ímpar (1, 3, 5, 7, 9 e 11) e seis lâmpadas com numeração par (2, 4, 6, 8 ,10 e 12). Deste modo, ele pode acomodar, primeiramente, cada uma das seis lâmpadas com numeração ímpar em uma caixa diferente. Como as caixas são idênticas e a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante, consideramos que há apenas um resultado possível para esse procedimento.



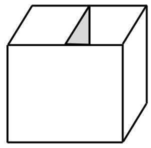
Nesse momento, cada uma das caixas passa a se diferenciar da outra apenas em razão do número da lâmpada acomodada em seu interior. Aristóteles, em seguida, deve colocar as lâmpadas com numeração par nas caixas.

- Ele tem 6 opções de lâmpadas (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12) para colocar na caixa que tem a lâmpada com o número 1.
- Em seguida, ele terá 5 opções de lâmpadas (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12, exceto a que foi colocada na caixa anterior) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 3.
- Depois, ele terá 4 opções de lâmpadas (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12, exceto as duas que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 5.
- Depois, ele terá 3 opções de lâmpadas (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12, exceto as três que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 7.
- Em seguida, ele terá 2 opções de lâmpadas (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12, exceto as quatro que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 9.
- Por fim, ele terá apenas 1 opção de lâmpada (números 2, 4, 6, 8, 10 e 12, exceto as cinco que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 11.

Logo, o número de maneiras diferentes de acomodar as 12 lâmpadas nas 6 caixas de modo que cada caixa contenha exatamente uma lâmpada com numeração ímpar e uma com numeração par é:

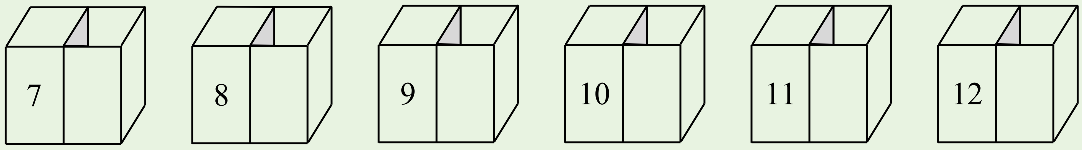
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

b) (7 pontos) De quantas maneiras diferentes as 12 lâmpadas podem ficar acomodadas nas 6 caixas mencionadas no item anterior de modo que, em cada caixa, a numeração de uma lâmpada seja igual a, pelo menos, o dobro da numeração da outra? Considere, novamente, que a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante.



Primeiramente, note que para garantir que a numeração de uma lâmpada seja igual a, pelo menos, o dobro da numeração da outra, não se pode colocar duas lâmpadas com números maiores do que 6 em uma mesma caixa.

Deste modo, Aristóteles pode acomodar, primeiramente, cada uma das seis lâmpadas com os números de 7 a 12 em uma caixa diferente. Como as caixas são idênticas e a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante, consideramos que há apenas um resultado possível para esse procedimento.



Assim como no item anterior, nesse momento, cada uma das caixas passa a se diferenciar da outra apenas em razão do número da lâmpada acomodada em seu interior. Aristóteles, em seguida, deve colocar as lâmpadas com os números de 1 a 6 nas caixas de modo a garantir que a numeração de uma lâmpada seja igual a, pelo menos, o dobro da numeração da outra.

- Ele tem 3 opções de lâmpadas (números 1, 2 ou 3) para colocar na caixa que tem a lâmpada com o número 7.
- Em seguida, ele terá 3 opções de lâmpadas (números 1, 2, 3 ou 4, exceto a que foi colocada na caixa anterior) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 8.
- Depois, ele terá 2 opções de lâmpadas (números 1, 2, 3 ou 4, exceto as duas que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 9.
- Depois, ele terá 2 opções de lâmpadas (números 1, 2, 3, 4 ou 5, exceto as três que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 10.
- Em seguida, ele terá 1 opção de lâmpada (números 1, 2, 3, 4 ou 5, exceto as quatro que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 11.
- Por fim, ele terá apenas 1 opção de lâmpada (números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, exceto as cinco que foram colocadas nas caixas anteriores) para acomodar na caixa que tem a lâmpada com o número 12.

Logo, o número de maneiras diferentes de acomodar as 12 lâmpadas nas 6 caixas de modo que, em cada caixa, a numeração de uma lâmpada seja igual a, pelo menos, o dobro da numeração da outra é:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 36$$

c) (8 pontos) Quando acesas, Aristóteles sabe que 8 dessas lâmpadas exibem cor azul e que as outras 4 exibem cor vermelha, mas não se lembra quais lâmpadas exibem cada cor. Ele tentará acertar a cor da luz das 12 lâmpadas, escrevendo o seu palpite em cada uma delas com uma caneta especial. Ele anotará "Azul" em exatamente 8 lâmpadas e "Vermelha" em exatamente 4. Em seguida, fará o teste acendendo todas as lâmpadas para descobrir quantos acertos teve. Qual é a probabilidade de ele acertar a cor da luz de, pelo menos, 8 lâmpadas?

Seja A a representação de que uma lâmpada exibe cor azul e V a representação de que uma lâmpada exibe cor vermelha. Podemos considerar que cada sequência diferente de 12 letras, sendo 8 A's e 4 V's, corresponde a uma configuração distinta das cores que as lâmpadas podem exibir. Desse modo, a sequência AAAAAAAAVVVV, por exemplo, simboliza que as lâmpadas com os números de 1 a 8 exibem cor azul enquanto as lâmpadas com os números de 9 a 12 exibem cor vermelha, e a sequência AVAVAVAVAAAA, por exemplo, simboliza que as lâmpadas com números de 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11 e 12 exibem cor azul enquanto as demais exibem cor vermelha.

O número total de sequências possíveis formadas por 8 letras A e 4 letras V é igual ao número de permutações de 12 elementos dos quais 8 são iguais a A e 4 são iguais a V, ou seja:

$$P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{4 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

Quando Aristóteles escreve o seu palpite nas lâmpadas, ele também está formando uma sequência e o que queremos é a probabilidade de que pelo menos 8 elementos dessa sequência coincidam com os respectivos elementos da sequência correta.

- Uma das maneiras disso acontecer é Aristóteles acertar todos os seus 12 palpites.
- Além dessa, como Aristóteles anotará "Azul" em exatamente 8 lâmpadas e "Vermelha" em exatamente 4, ele poderia simplesmente inverter uma letra V com uma letra A da sequência correta, acertando, portanto, 10 dos seus palpites. Ele tem 8 possibilidades de letra V da sequência correta para trocar por uma letra A e 4 possibilidades de letra A da sequência correta para trocar por uma letra V, contando, portanto, com $8 \cdot 4 = 32$ maneiras de acertar exatamente 10 palpites.
- Finalmente, como Aristóteles anotará "Azul" em exatamente 8 lâmpadas e "Vermelha" em exatamente 4, ele poderia inverter duas letras V com duas letras A da sequência correta, acertando, portanto, 8 dos seus palpites. Ele tem $C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2 \cdot \cancel{6!}} = 28$ possibilidades de pares de letras V para trocar por duas letras A e $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2 \cdot 2}} = 6$ possibilidades de pares de letras A para trocar por duas letras V, contando, portanto, com $28 \cdot 6 = 168$ maneiras de acertar exatamente 8 palpites.

Logo, a probabilidade de Aristóteles acertar a cor da luz de, pelo menos, 8 lâmpadas é igual a:

$$P = \frac{1 + 32 + 168}{495} = \frac{201}{495} \Rightarrow \boxed{P = \frac{67}{165}}$$

QUESTÃO 05

Rafaela possui exatamente 10 baldes de mesmo volume, sendo alguns deles azuis e os demais vermelhos. Inicialmente, cada balde contém uma quantidade de água, não sendo essas quantidades necessariamente iguais entre si. Sabe-se apenas que o volume total de água contido nos baldes azuis é igual a cinco vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Cada um desses baldes é colocado sob uma torneira e, em seguida, todas são ligadas simultaneamente, à vazão de 1 litro por minuto. Após um minuto, o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual a quatro vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Decorridos mais quatro minutos, todas as torneiras são desligadas ao mesmo tempo e o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual três vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Sabe-se, também, que a água não chegou a transbordar em balde algum.

a) (8 pontos) Com base nas informações do texto, determine quantos baldes azuis Rafaela possui e quantos litros de água estavam nos baldes vermelhos, no total, logo após as torneiras serem desligadas.

Sejam x e $10-x$ as quantidades de baldes azuis e vermelhos que Rafaela possui, respectivamente. Além disso, seja a o volume total de água, em litros, contido nos baldes azuis no início e v o volume total de água, em litros, contido nos baldes vermelhos inicialmente.

Segundo o enunciado, no início o volume total de água contido nos baldes azuis no é igual a cinco vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Logo:

$$a=5v \qquad (1)$$

Após 1 minuto com as torneiras ligadas, os baldes azuis conterão $a+x$ litros de água e os baldes vermelhos conterão $v+(10-x)$ litros de água. Como o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual a quatro vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos, tem-se:

$$a+x=4\cdot(v+10-x)$$

$$a+x=4v+40-4x$$

$$a-4v+5x=40 \qquad (2)$$

Por fim, decorridos mais 4 minutos, os baldes azuis conterão $a+x+4x=a+5x$ litros de água e os baldes vermelhos conterão $v+(10-x)+4\cdot(10-x)=v+50-5x$ litros de água. Como o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual a três vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos, tem-se:

$$a+5x=3\cdot(v+50-5x)$$

$$a+5x=3v+150-15x$$

$$a-3v+20x=150 \qquad (3)$$

Substituindo (1) em (2) e (3) e organizando as equações em um sistema linear, tem-se:

$$\begin{cases}5v-4v+5x=40\\5v-3v+20x=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v+5x=40 & \times(2)\\2v+20x=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2v+10x=80\\2v+20x=150\end{cases} \quad -$$

$$-10x=-70 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

$$2v+10\cdot 7=80 \Rightarrow \boxed{v=5\text{ litros}}$$

Logo, Rafaela possui 7 baldes azuis e 3 baldes vermelhos.

Além disso, como as torneiras ficaram ligadas por 5 minutos, o volume de água que estavam nos baldes vermelhos, no total, logo após as torneiras serem desligadas é igual a $v+3\cdot 5=5+15=20$ litros.

b) (6 pontos) Após desligar as torneiras, Rafaela despeja toda a água contida nos 10 baldes em um grande reservatório que, inicialmente, estava vazio. Em seguida, retira deste reservatório um volume V de água e acrescenta o mesmo volume V de álcool puro, misturando os líquidos e obtendo uma solução homogênea. Logo depois, Rafaela retira um volume V da solução contida no reservatório e, novamente, acrescenta o mesmo volume V de álcool puro. No final desse processo, o reservatório fica com 45 litros de água. Determine o valor de V, em litros.

Pelo item anterior, sabe-se que, logo após as torneiras serem desligadas, o volume total de água contido nos baldes vermelhos é igual a 20 litros. Logo, pelas informações do enunciado, o volume total de água contido nos baldes azuis é igual a $3 \cdot 20 = 60 \text{ litros}$. Portanto, o volume total de água contido nos 10 baldes é igual a $20 + 60 = 80 \text{ litros}$ e este é o volume de água que Rafaela despeja no reservatório.

$$\text{Tempo 0 (início)} \begin{cases} \text{Água (litros): } 80 \\ \text{Álcool (litros): } 0 \end{cases}$$

Em seguida, Rafaela retira deste reservatório um volume V de água e acrescenta o mesmo volume V de álcool puro, misturando os líquidos e obtendo uma solução que fica com a seguinte composição:

$$\text{Tempo 1} \begin{cases} \text{Água (litros): } 80 - \text{V} \\ \text{Álcool (litros): V} \end{cases}$$

Logo depois, Rafaela retira novamente um volume V da solução contida no reservatório. Deste volume retirado, uma fração $\left(\dfrac{80-\text{V}}{80}\right)$ é de água e outra fração $\left(\dfrac{\text{V}}{80}\right)$ é de álcool. Como ela acrescenta o mesmo volume V de álcool puro em seguida, a solução fica com a seguinte composição:

$$\text{Tempo 2} \begin{cases} \text{Água (litros): } (80-\text{V}) - \left(\dfrac{80-\text{V}}{80}\right) \cdot \text{V} = \dfrac{80 \cdot (80-\text{V}) - (80-\text{V}) \cdot V}{80} = \dfrac{(80-\text{V}) \cdot (80-\text{V})}{80} = \dfrac{(80-\text{V})^2}{80} \\ \text{Álcool (litros): V} - \left(\dfrac{\text{V}}{80}\right) \cdot \text{V} + \text{V} \end{cases}$$

Como o reservatório fica com 45 litros de água no final desse processo, tem-se:

$$\frac{(80-\text{V})^2}{80} = 45$$

$$(80-\text{V})^2 = 3600$$

$$(80-\text{V}) = \pm 60$$

$$\boxed{\text{V} = 20 \text{ litros}} \quad \text{ou} \quad \cancel{\text{V} = -140 \text{ litros}}$$

c) (6 pontos) Se Rafaela continuar realizando esse processo, retirando, cada vez, um volume V da solução homogênea contida no reservatório e acrescentando e misturando, em seguida, o mesmo volume V de álcool puro, quantos litros de álcool ela terá despejado no reservatório, no total, até que o volume de água nele fique o mais próximo possível de 6 litros? Considere que V tem o mesmo valor do item anterior e utilize, se necessário, as seguintes aproximações para as potências de 0,75:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0{,}75^x$	0,750	0,563	0,422	0,316	0,237	0,178	0,133	0,100	0,075	0,056

Vamos tentar encontrar um padrão para o volume de água contido no reservatório após cada processo de retirada do volume V da solução homogênea seguida pelo acréscimo do mesmo volume V de álcool puro. Pelo item anterior, já sabemos que $V = 20$ litros e que, ao despejar pela segunda vez o volume V de álcool puro no reservatório, o volume de água que resta nele é:

$$\text{Tempo } 2 \rightarrow \text{Água (litros): } \frac{(80-V)^2}{80} = \frac{(80-20)^2}{80} = \frac{60^2}{80}$$

Note que, após cada realização do processo, o volume da solução contida no reservatório se mantém constante, igual a 80 litros. Quando Rafaela retirar, pela terceira vez, o volume $V = 20$ litros da solução contida neste reservatório, uma fração $\dfrac{\frac{60^2}{80}}{80} = \dfrac{60^2}{80^2}$ desses 20 litros retirados é de água. Como só é acrescentado álcool puro em seguida, o volume de água que restará no reservatório é:

$$\text{Tempo } 3 \rightarrow \text{Água (litros): } \frac{60^2}{80} - \frac{60^2}{80^2}\cdot 20 = \frac{80\cdot 60^2 - 60^2\cdot 20}{80^2} = \frac{60^2(80-20)}{80^2} = \frac{60^3}{80^2}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se concluir que, quando Rafaela retirar, pela n-ésima vez, o volume $V = 20$ litros da solução contida neste reservatório, o volume de água que restará nele é:

$$\text{Tempo n} \rightarrow \text{Água (litros): } \frac{60^n}{80^{n-1}}$$

Assim, para que o volume de água no reservatório fique o mais próximo possível de 6 litros, Rafaela precisará realizar este processo um número n de vezes tal que:

$$\frac{60^n}{80^{n-1}} \cong 6 \quad\Rightarrow\quad \frac{80}{80}\cdot\frac{60^n}{80^{n-1}} \cong 6 \quad\Rightarrow\quad 80\cdot\frac{60^n}{80^n} \cong 6 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{60}{80}\right)^n \cong \frac{6}{80} \quad\Rightarrow\quad 0{,}75^n \cong 0{,}075 \quad\Rightarrow\quad \boxed{n=9}$$

Deste modo, Rafaela terá despejado, no total, $9\cdot 20 = 180$ litros de álcool puro no reservatório até que o volume de água nele fique o mais próximo possível de 6 litros.