OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

OMIF 2022

Resolução Comentada da Prova de Primeira Fase

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

Três números inteiros (x, y e z) devem ser escolhidos de modo que o produto de todos eles seja igual a 6, ou seja, de modo que se obtenha $x \cdot y \cdot z = 6$. Três escolhas diferentes são:

$$(x,y,z) = (1,1,6)$$
$$(x,y,z) = (6,1,1)$$
$$(x,y,z) = (-1,-6,1)$$

No total, quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

A) 12
B) 18
C) 30
D) 36
E) 42

RESPOSTA DA QUESTÃO 01: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Desconsiderando-se a ordem, há exatamente 7 trios de números cujo produto é igual a 6. São eles: $(1,1,6)$; $(-1,-1,6)$; $(1,-1,-6)$; $(1,2,3)$;$(-1,-2,3)$; $(-1,2,-3)$ e $(1,-2,-3)$.

O enunciado deixa claro que as escolhas $(1,1,6)$ e $(6,1,1)$ são consideradas diferentes. Assim, devemos considerar as permutações de cada trio na contagem do total de escolhas possíveis.

Quando um desses trios contém dois números iguais e um diferente, ele representa 3 escolhas possíveis, já que este valor diferente poderia ser x, y ou z. Por exemplo, o trio $(1,1,6)$ equivale às seguintes 3 escolhas para (x,y,z): $(1,1,6)$, $(1,6,1)$ e $(6,1,1)$.

Quando um desses trios contém três números diferentes, ele representa $3!=6$ escolhas possíveis, que é a quantidade de permutações simples de 3 elementos. Por exemplo, o trio $(1,2,3)$ equivale às seguintes 6 escolhas para (x,y,z): $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ e $(3,2,1)$.

Dos 7 trios de números cujo produto é igual a 6, dois deles contém dois números iguais e um diferente e cinco deles contém três números diferentes. Assim, o total de escolhas que podem ser feitas para os números x, y e z é:

$$N=2\cdot3+5\cdot6$$

$$N=6+30$$

$$\boxed{N=36}$$

QUESTÃO 02

Numa tarde de domingo, Patrícia começa a escrever em seu caderno uma sequência de caracteres. Esses caracteres são formados pela palavra OMIF seguida do número de vezes que esta palavra já foi escrita até então. Ela começa em OMIF1 e termina em OMIF2022, conforme indica o esquema abaixo:

OMIF1OMIF2OMIF3.....OMIF2021OMIF2022

No total, quantos caracteres Patrícia escreveu?

A) 15080
B) 15069
C) 15056
D) 15048
E) 15041

RESPOSTA DA QUESTÃO 02: Alternativa B

RESOLUÇÃO

No total, Patrícia escreveu:

- 2022 vezes a palavra OMIF, que possui 4 caracteres.
- 9 números de um algarismo (1 a 9).
- $99-10+1=90$ números de dois algarismos (10 a 99).
- $999-100+1=900$ números de três algarismos (100 a 999).
- $2022-1000+1=1023$ números de quatro algarismos (1000 a 2022).

Assim, a quantidade total de caracteres que Patrícia escreveu é igual a:

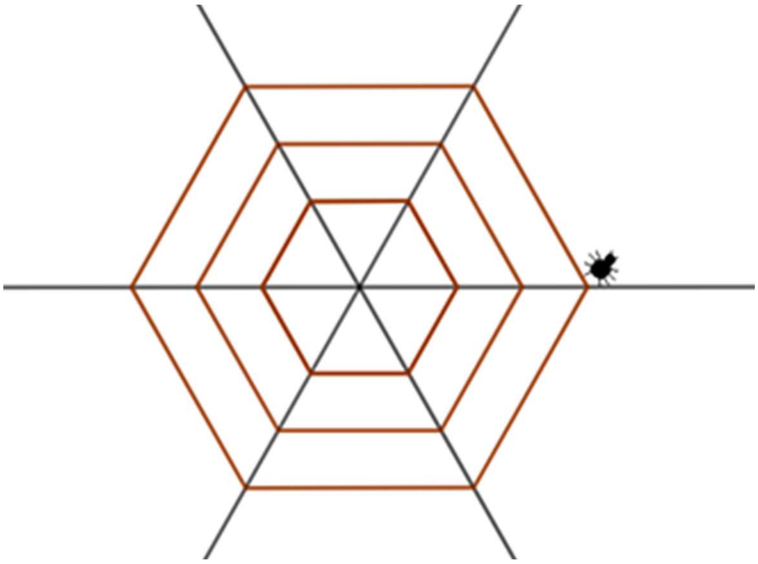
$$\underbrace{4\cdot 2022}_{\substack{\text{Quantidade}\\\text{total de}\\\text{caracteres}\\\text{de OMIF,}\\\text{escrito}\\\text{2022 vezes}}}+\underbrace{9}_{\substack{\text{Quantidade}\\\text{total de}\\\text{caracteres}\\\text{dos}\\\text{números}\\\text{de um}\\\text{algarismo}\\\text{(1 a 9)}}}+\underbrace{2\cdot 90}_{\substack{\text{Quantidade}\\\text{total de}\\\text{caracteres}\\\text{dos}\\\text{números}\\\text{de dois}\\\text{algarismos}\\\text{(10 a 99)}}}+\underbrace{3\cdot 900}_{\substack{\text{Quantidade}\\\text{total de}\\\text{caracteres}\\\text{dos}\\\text{números}\\\text{de três}\\\text{algarismos}\\\text{(100 a 999)}}}+\underbrace{4\cdot 1023}_{\substack{\text{Quantidade}\\\text{total de}\\\text{caracteres}\\\text{dos}\\\text{números}\\\text{de quatro}\\\text{algarismos}\\\text{(1000 a 2022)}}}$$

ou seja,

$$8088+9+180+2700+4092=\boxed{15069}$$

QUESTÃO 03

Um estudante de Biologia, durante uma visita de campo, observa atentamente uma aranha, que começa a tecer tranquilamente sua teia em um canto da mata. Ele percebe que a aranha vai desenhando hexágonos regulares concêntricos a partir de três teias radiais previamente confeccionadas. No início de sua observação, a aranha estava iniciando a confecção do menor hexágono, de lado 3 mm, a partir de um de seus vértices. Insistindo em sua ininterrupta empreitada, a aranha passa a construir os próximos hexágonos, cada um deles com lado 2 mm maior do que o anterior, até completar o décimo hexágono e descansar neste local à espera de sua primeira vítima.



Considere que o tempo que a aranha demora entre o término de um hexágono e o início do próximo (deslocando-se sobre uma teia radial) seja de 5 segundos e que a velocidade com que a aranha deposita sua teia para construir cada hexágono é de 0,5 mm/s. Se na construção de cada hexágono a aranha deposita sua teia uma única vez, o tempo total de observação deste fenômeno, do início da confecção do primeiro hexágono até o término do último, foi de:

A) 240 segundos
B) 285 segundos
C) 1440 segundos
D) 1485 segundos
E) 1530 segundos

RESPOSTA DA QUESTÃO 03: Alternativa D

RESOLUÇÃO

O primeiro hexágono que a aranha confeccionou possui 3 mm de lado, ou seja, um perímetro de $3 \cdot 6 = 18$ mm. Considerando que cada hexágono possui lado 2 mm maior do que o anterior, então o aumento no perímetro de um hexágono para o próximo é de $6 \cdot 2 = 12$ mm. Assim, os perímetros, em mm, de todos os hexágonos confeccionados pela aranha são, na sequência:

$$(18, 30, 42, 54, 66, 78, 90, 102, 114, 126)$$

Note que a soma do primeiro com o último termo desta sequência $(18+126)$ é igual à soma do segundo com o penúltimo termo $(30+114)$, que é igual à soma do terceiro com o antepenúltimo termo $(42+102)$ e assim por diante, totalizando 5 somas parciais iguais. Assim, a soma dos perímetros de todos os hexágonos confeccionados é:

$$(18+126) \cdot 5 = 144 \cdot 5 = 720 \text{ mm}$$

A velocidade com que a aranha deposita sua teia para construir cada hexágono é de 0,5 mm/s, o que significa que ela demora 2 segundos para depositar cada milímetro de teia. Assim, para confeccionar todos os 10 hexágonos, a aranha demorou:

$$T = 720 \cdot 2 = 1440 \text{ s}$$

Deve-se, também, considerar o tempo que a aranha demora entre o término de um hexágono e o início do próximo, deslocando-se sobre uma teia radial. Conforme o enunciado, são 5 segundos para cada deslocamento e, como são 9 deslocamentos no total, conclui-se que o tempo gasto nesses movimentos é:

$$t = 5 \cdot 9 = 45 \text{ s}$$

Logo, o tempo total de observação deste fenômeno, do início da confecção do primeiro hexágono até o término do último, foi de:

$$T + t = 1440 + 45 = \boxed{1485 \text{ s}}$$

QUESTÃO 04

Na turma do 3° ano do IFMG, campus Betim, 4 a cada 5 homens gostam de Matemática e 5 a cada 6 mulheres gostam de Matemática. Sabe-se que o número de mulheres dessa sala é igual ao triplo do número de homens e que todos os estudantes da turma se identificam ou como homem ou como mulher. Desta forma, a razão entre o total de estudantes que gostam de Matemática e o total de estudantes da sala, nesta turma, é:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{49}{90}$

D) $\frac{9}{11}$

E) $\frac{33}{40}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 04: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Sejam m o número de mulheres que gostam de Matemática, h o número de homens que gostam de Matemática, M o total de mulheres da turma e H o total de homens da turma. Pelas informações do problema, tem-se que:

$$(1) \qquad h = \frac{4}{5}H$$

$$(2) \qquad m = \frac{5}{6}M$$

$$(3) \qquad M = 3H$$

Substituindo (3) em (2), obtém-se:

$$(4) \qquad m = \frac{5}{6} \cdot 3H = \frac{5}{2}H$$

Assim, a razão R entre o total de estudantes que gostam de Matemática e o total de estudantes da sala, nesta turma, é:

$$R = \frac{h+m}{H+M} = \frac{\frac{4}{5}H + \frac{5}{2}H}{H+3H}$$

$$R = \frac{\cancel{H}\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{2}\right)}{4\cancel{H}} = \frac{\frac{8+25}{10}}{4}$$

$$R = \frac{33}{10} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boxed{R = \frac{33}{40}}$$

QUESTÃO 05

O departamento de Matemática de um campus do Instituto Federal convidou 2 técnicos administrativos e 3 professores para participarem de uma banca de TCC. Estes servidores irão avaliar a apresentação de 3 estudantes de graduação em Engenharia de Controle e Automação: Marineide, Renivaldo e Laynara. Nesta instituição, a banca avaliadora de cada estudante deve ser sempre composta de 1 técnico administrativo e 2 professores. As equipes escaladas para compor cada banca são mostradas na tabela abaixo:

Estudante	Banca avaliadora
Marineide	Carlos, Felipe e Renato
Renivaldo	Renato, Tatiane e Wagner
Laynara	Carlos, Felipe e Wagner

A partir dessas informações, pode-se concluir que:

A) Wagner é professor.
B) Carlos é professor.

C) Tatiane é professora.

D) Felipe é técnico administrativo.

E) Renato é técnico administrativo.

RESPOSTA DA QUESTÃO 05: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Como a banca avaliadora de cada estudante deve ser sempre composta de 1 técnico administrativo e 2 professores, tem-se que, se tanto Carlos quanto Felipe fossem professores, então Renato e Wagner deveriam ser técnicos administrativos, de modo a garantir a restrição imposta para os estudantes Marineide e Laynara.

Porém, neste caso, a banca avaliadora de Renivaldo seria composta de 2 técnicos administrativos, o que contradiz a restrição colocada.

Assim, não é possível que Carlos e Felipe sejam, ambos, professores. Também não é possível que sejam, ambos, técnicos administrativos. Portanto, necessariamente, um deles é professor e o outro é técnico administrativo, embora não seja possível concluir quem tem qual profissão.

Desta forma, para garantir a restrição exigida, tem-se que tanto Renato como Wagner são professores. Analisando-se a banca avaliadora do estudante Renivaldo, conclui-se, por fim, que Tatiane é técnica administrativa.

A única opção que contém uma conclusão que pode ser inferida a partir das informações do problema é a alternativa A.

QUESTÃO 06

A sequência de números $(1, 4, 7, 10, 13, 16, ...)$, na qual cada elemento é igual ao anterior adicionado de 3 unidades, foi escrita em linhas, como ilustrado na figura abaixo. Nesta figura, note que a linha j apresenta exatamente j elementos da sequência, para qualquer j natural.

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 4 & 7 & & \\ 10 & 13 & 16 & \\ 19 & 22 & 25 & 28 \\ & & \vdots & \end{array}$$

Qual é o quinto elemento da linha 22 desta figura?

A) 775
B) 772
C) 709
D) 706
E) 79

RESPOSTA DA QUESTÃO 06: Alternativa D

RESOLUÇÃO

A sequência de números $(1, 4, 7, 10, 13, 16, ...)$ é uma progressão aritmética de razão igual a 3. Para descobrir qual é o quinto elemento da linha 22 da figura, vamos determinar, primeiramente, a posição deste elemento na sequência. Sendo n a sua posição, tem-se que:

$$n = \underbrace{1+2+3+...+19+20+21}_{\substack{\text{Número de elementos das linhas} \\ \text{anteriores, ou seja, das} \\ \text{linhas 1 até 21}}} + \underbrace{\quad 5 \quad}_{\substack{\text{Posição do} \\ \text{elemento} \\ \text{na linha 22}}}$$

$$n = \frac{(1+21)\cdot 21}{2} + 5$$

$$n = 11\cdot 21 + 5$$

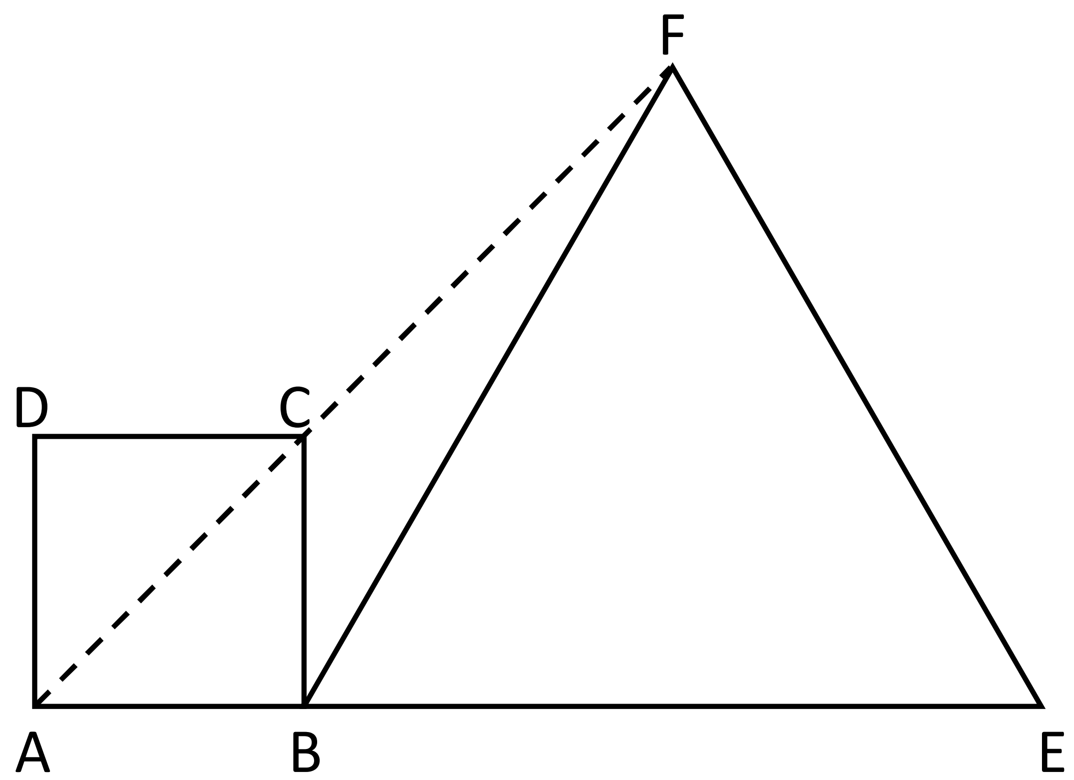
$$\boxed{n = 236}$$

Deste modo, o quinto elemento da linha 22 da figura é o 236º elemento da sequência. Note que este elemento pode ser calculado somando-se 235 vezes o número 3 ao primeiro termo da progressão. Portanto, o quinto elemento da linha 22 desta figura é:

$$1+3\cdot 235=\boxed{706}$$

QUESTÃO 07

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado com lados de comprimento igual a 1 cm e BEF é um triângulo equilátero. Os pontos A, B e E são colineares, bem como os pontos A, C e F.



O comprimento, em cm, dos lados do triângulo equilátero BEF é:

A) $\sqrt{3}-1$

B) $\sqrt{3}+1$

C) $2\sqrt{2}$

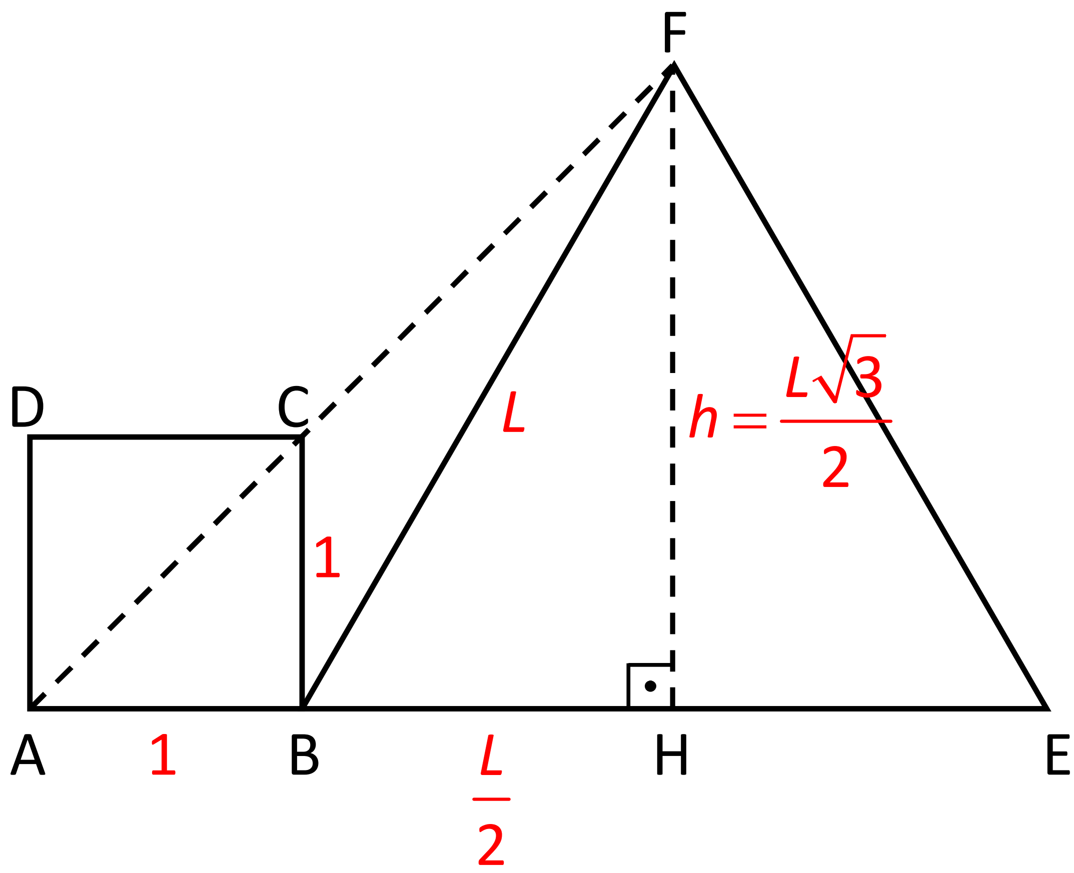
D) $3\sqrt{2}-1$

E) 3

RESPOSTA DA QUESTÃO 07: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Seja L o comprimento dos lados do triângulo BEF, H o pé da altura relativa ao lado $\overline{BE}$ e h o comprimento desta altura. Pela simetria do triângulo equilátero, tem-se que $BH = \frac{L}{2}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BFH, conclui-se que:

$$h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2$$

$$h^2 + \frac{L^2}{4} = L^2$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4}$$

$$\boxed{h = \frac{L\sqrt{3}}{2}}$$

Agora, note que os triângulos ABC e AHF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, já que ambos são triângulos retângulos e possuem um ângulo em comum. Logo:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{HF}$$

$$\frac{1}{1}=\frac{1+\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$$

$$1+\frac{L}{2}=\frac{L\sqrt{3}}{2} \quad (\times 2)$$

$$2+L=L\sqrt{3}$$

$$2=L\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$L=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\ \text{cm}$$

Racionalizando o valor de L, tem-se que:

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

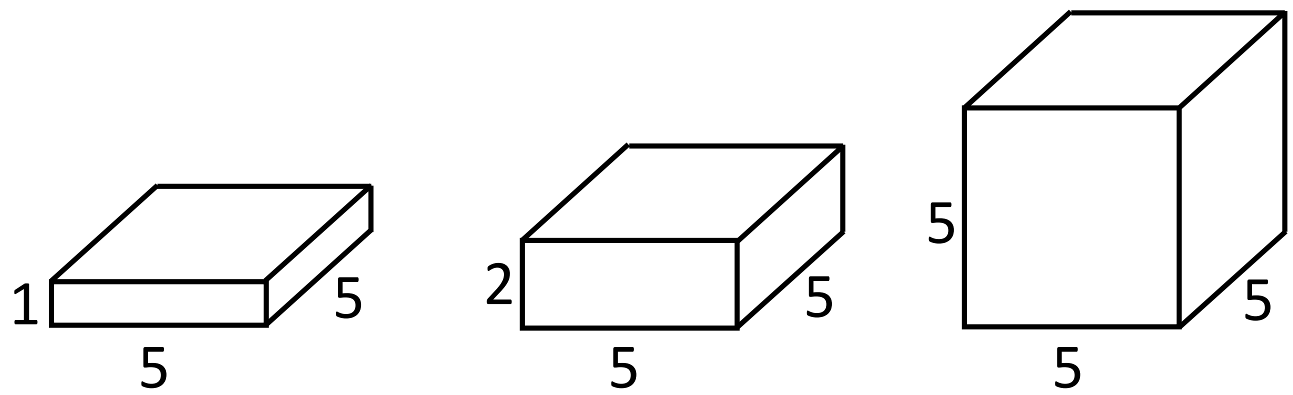
$$L = \frac{\cancel{2} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{3-1}}$$

$$\boxed{L = \left(\sqrt{3}+1\right)\ \text{cm}}$$

NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 08

Isabela tem vários bloquinhos de madeira com os quais gosta de brincar. Todos têm o formato de um paralelepípedo reto-retângulo e a base de todos é um quadrado com lados de comprimento igual a 5 cm. Os bloquinhos se diferenciam somente pelas suas alturas, que são de 1 cm, 2 cm ou 5 cm apenas.



Isabela pretende montar uma torre de exatamente 10 cm de altura, empilhando alguns desses bloquinhos um sobre o outro de modo que apenas as bases quadradas fiquem em contato. Para isso, ela precisa escolher, primeiramente, quantos bloquinhos de cada tipo vai usar. Qualquer uma das escolhas possíveis destas quantidades tem a mesma probabilidade de ser feita, destacando-se que a ordem de escolha dos bloquinhos e a posição que eles ocuparão posteriormente na torre são irrelevantes nesta decisão. Se Isabela possui mais de 10 bloquinhos de cada tipo, qual é a probabilidade de ela escolher usar, no total, um número ímpar de bloquinhos na construção da torre?

A) $\frac{3}{10}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 08: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Cada linha da tabela abaixo apresenta uma escolha possível para as quantidades de bloquinhos de cada tipo. Com cada uma destas escolhas, e apenas com elas, é possível realizar a montagem de uma torre de exatamente 10 cm de altura:

Bloquinhos de 1 cm de altura	Bloquinhos de 2 cm de altura	Bloquinhos de 5 cm de altura	Total de bloquinhos
10	0	0	10
8	1	0	9
6	2	0	8
5	0	1	6
4	3	0	7
3	1	1	5
2	4	0	6
1	2	1	4
0	5	0	5
0	0	2	2

Note que há exatamente 10 possibilidades de escolha e que 4 delas usam um número ímpar de bloquinhos no total (em destaque na tabela).

Como qualquer uma das 10 escolhas possíveis tem a mesma probabilidade de ser feita e a ordem de escolha dos bloquinhos é irrelevante, bem como a posição que eles ocuparão posteriormente na torre, então a probabilidade solicitada na questão é:

$$P = \frac{4}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P = \frac{2}{5}}$$

QUESTÃO 09

Um professor de Matemática solicitou a um aluno que determinasse o menor número natural que, ao ser multiplicado por 13, resultasse em outro número natural cujos algarismos são todos iguais a 5. O aluno realizou uma operação aritmética elementar e respondeu corretamente ao pedido do professor. Com relação ao menor número com as características solicitadas pelo professor, é correto afirmar que:

A) é um múltiplo de 7.
B) é maior que 43000.
C) é menor que 42000.
D) é múltiplo de 17.
E) a soma de seus algarismos é 20.

RESPOSTA DA QUESTÃO 09: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Seja N um número natural que, ao ser multiplicado por 13, resulta em outro número natural cujos algarismos são todos iguais a 5, ou seja:

$$N \times 13 = 5555555...555$$

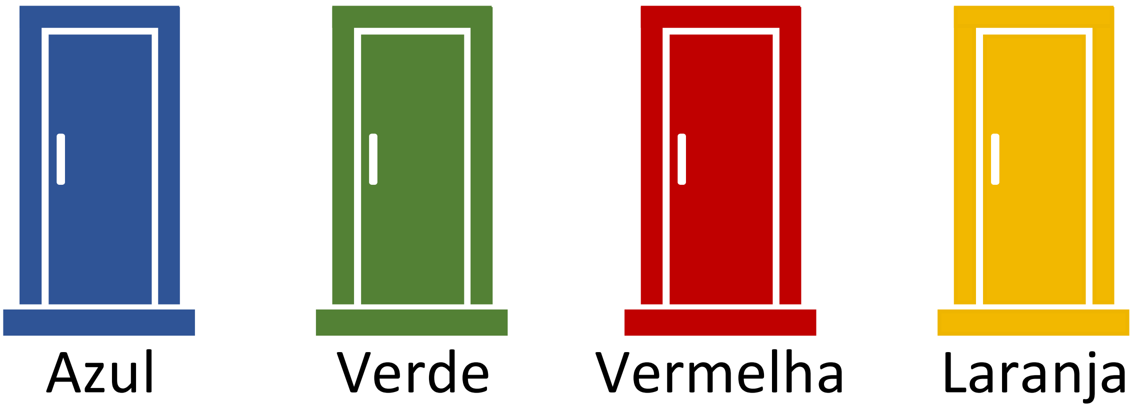
Para se determinar o número N, basta que se efetue a divisão de 5555555...555 por 13. Devemos ter resto zero nesta divisão, já que N é um número natural e, para que N seja o menor número possível, é necessário que o número 5555555...555 tenha o menor número possível de cincos também. Realizando a divisão, obtém-se:

$$
\begin{array}{l|l}
5\,5'5'5'5'5'\cancel{5\,5\,5\,5 \ldots 5\,5\,5} & 1\,3 \\ \cline{2-2}
-5\,2 & 4\,2\,7\,3\,5 \\ \cline{1-1}
\,3\,5 & \\
-2\,6 & \\ \cline{1-1}
\,9\,5 & \\
-9\,1 & \\ \cline{1-1}
\,4\,5 & \\
-3\,9 & \\ \cline{1-1}
\,6\,5 & \\
-6\,5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Observe, pelo esquema anterior, que $13 \times 42735 = 555555$. Logo, o número respondido pelo aluno é 42735, que é um múltiplo de 7.

QUESTÃO 10

Um professor de Matemática desenvolveu uma atividade com seus alunos colocando uma medalha de ouro da OMIF atrás de uma das 4 portas coloridas que havia no pátio da escola, conforme a figura abaixo.



Em cada porta, o professor escreveu uma frase:

- Porta Azul: A medalha está aqui.
- Porta Verde: A medalha não está aqui.
- Porta Vermelha: A medalha está na porta verde.
- Porta Laranja: A medalha está na porta azul.

Sabe-se que apenas uma das frases contém uma informação verdadeira e que é possível determinar, com certeza, em que porta a medalha está a partir destas frases. Então, a porta onde está a medalha de ouro e a porta que contém a informação verdadeira são, respectivamente:

A) Porta Azul e Porta Verde.
B) Porta Vermelha e Porta Azul.
C) Porta Azul e Porta Vermelha.
D) Porta Vermelha e Porta Verde.
E) Porta Verde e Porta Vermelha.

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Sabendo-se que apenas uma das frases contém uma informação verdadeira, vamos analisar as seguintes possibilidades:

- 1ª possibilidade: Se a frase verdadeira estiver na Porta Azul.
  Neste caso, a medalha estaria na Porta Azul. Porém, deste modo, a Porta Laranja também estaria com uma informação verdadeira, o que é uma contradição. Logo, a frase verdadeira não está na Porta Azul.

- 2ª possibilidade: Se a frase verdadeira estiver na Porta Verde.
  Neste caso, a medalha não estaria na Porta Verde. Deste modo, a frase da Porta Vermelha é falsa e as frases das Portas Azul e Laranja ou são ambas falsas ou são ambas verdadeiras. Para não cair em contradição, devemos supor que são ambas falsas, ou seja, que a medalha não está na

Porta Azul. Porém, deste modo não há como concluir em que Porta a medalha está: se na Vermelha ou se na Laranja. Como o enunciado diz que é possível determinar, com certeza, em que porta a medalha está a partir destas frases, então a frase verdadeira não pode estar na Porta Verde.

- <u>3ª possibilidade</u>: Se a frase verdadeira estiver na Porta Vermelha.
  Neste caso, a medalha estaria na Porta Verde. Assim, todas as outras portas conteriam uma informação falsa, satisfazendo o que o enunciado propõe. Logo, a medalha de ouro está na Porta Verde e a frase verdadeira está na Porta Vermelha.

- <u>4ª possibilidade</u>: Se a frase verdadeira estiver na Porta Laranja.
  Neste caso, a medalha estaria na Porta Azul. Porém, deste modo, a Porta Azul também estaria com uma informação verdadeira, o que é uma contradição. Logo, a frase verdadeira não está na Porta Laranja.

Como a 3ª possibilidade é a única que não apresenta contradições, então a medalha de ouro está na Porta Verde e a frase verdadeira está na Porta Vermelha.

QUESTÃO 11

Sejam B um número natural de 3 algarismos e C o número formado pela troca de posição apenas dos algarismos da unidade e da centena de B, mantendo o mesmo algarismo da dezena. A soma dos algarismos de B é igual a 16, e o algarismo das centenas de B é igual ao dobro do algarismo das unidades de B. Se $B - C = 297$, então $B + C$ é igual a:

A) 666
B) 929
C) 1049
D) 1089
E) 1272

RESPOSTA DA QUESTÃO 11: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Sendo x, y e z os algarismos da centena, da dezena e da unidade de B, respectivamente, tem-se $B = xyz$. Como C é o número formado pela troca de posição apenas dos algarismos da unidade e da centena de B, mantendo o mesmo algarismo da dezena, então tem-se $C = zyx$. Desta forma:

$$B = z + 10y + 100x$$

$$C = x + 10y + 100z$$

Sabe-se que a soma dos algarismos de B é igual a 16, que o algarismo das centenas de B é igual ao dobro do algarismo das unidades de B e que $B - C = 297$. Assim:

$$\begin{cases} x + y + z = 16 & (1) \\ x = 2z & (2) \\ (z + 10y + 100x) - (x + 10y + 100z) = 297 & (3) \end{cases}$$

Por (3), tem-se que:

$$(z+10y+100x)-(x+10y+100z)=297$$
$$99x-99z=297$$
$$99(x-z)=297$$
$$x-z=3 \qquad (4)$$

Substituindo-se (2) em (4), obtém-se:

$$2z-z=3$$
$$\boxed{z=3}$$

Logo, por (2):

$$x=2z$$
$$x=2\cdot 3$$
$$\boxed{x=6}$$

Finalmente, por (1), tem-se que:

$$x+y+z=16$$

$$6+y+3=16$$

$$\boxed{y=7}$$

Desta forma, pode-se concluir que $B=673$ e que $C=376$. Portanto,

$$B+C=673+376$$

$$\boxed{B+C=1049}$$

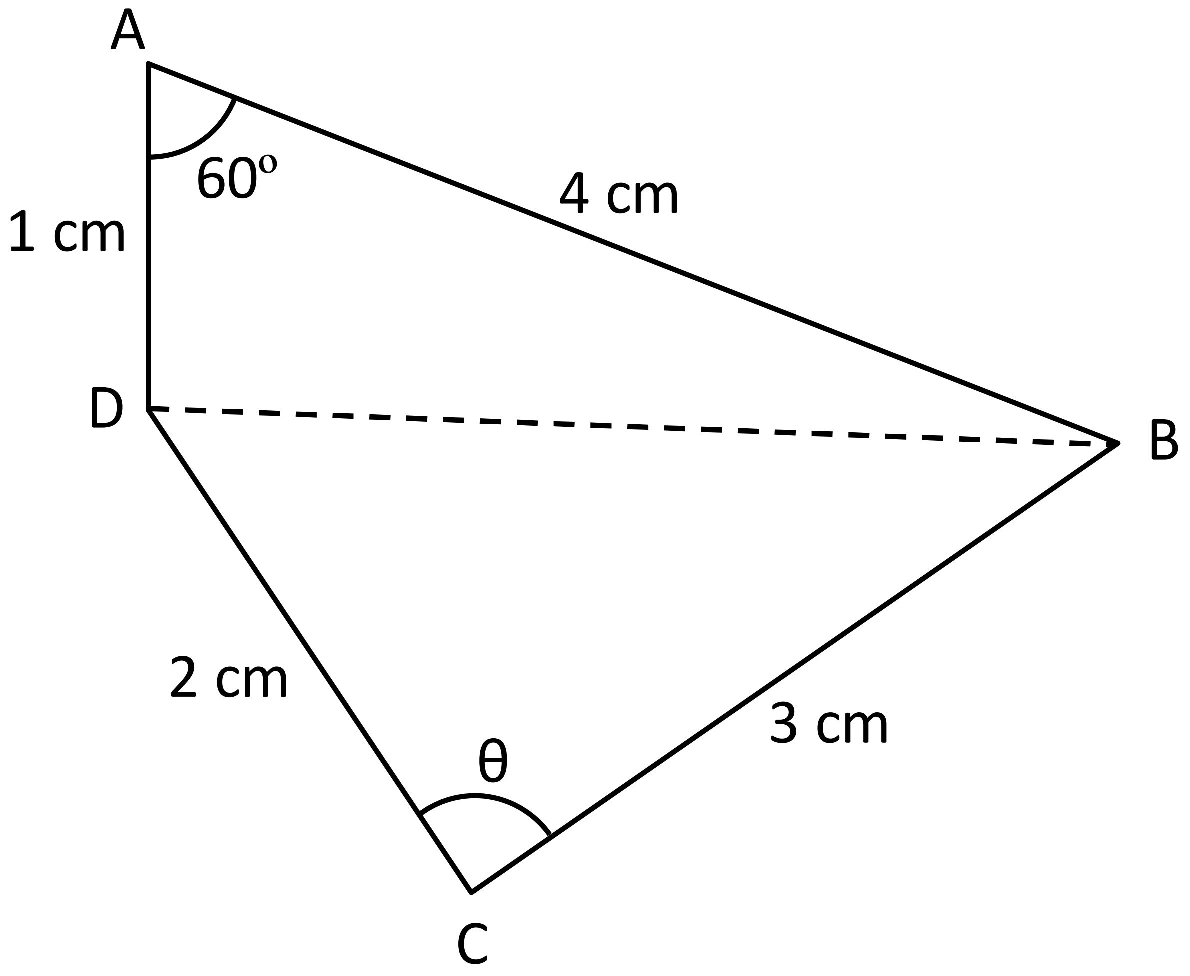
QUESTÃO 12

Seja ABCD um quadrilátero convexo cujo ângulo $B\hat{A}D$ mede $60°$ e cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem, respectivamente, 4 cm, 3 cm, 2 cm e 1 cm. A área do quadrilátero ABCD, em cm², é:

A) $\sqrt{13}$
B) $3+\sqrt{3}$
C) $3+\sqrt{13}$
D) $3\sqrt{13}$
E) 13

RESPOSTA DA QUESTÃO 12: Alternativa B
RESOLUÇÃO

A figura abaixo ilustra o quadrilátero ABCD descrito no enunciado:



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABD, tem-se que:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos 60°$$

$$BD^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 1 + 16 - 4$$

$$BD^2 = 13$$

$$\boxed{BD = \sqrt{13}\ \text{cm}}$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos no triângulo BCD, tem-se que:

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2 \cdot CD \cdot BC \cdot \cos\theta$$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta$$

$$13 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos\theta$$

$$12 \cdot \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\boxed{\theta = 90°}$$

Isto significa que o triângulo BCD é retângulo em C. Também seria possível chegar a esta conclusão percebendo-se que o triângulo BCD satisfaz o Teorema de Pitágoras, uma vez que $BD^2 = CD^2 + BC^2$ pois $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2^2 + 3^2$.

Por fim, note que a área do quadrilátero ABCD pode ser obtida somando-se as áreas dos triângulos ABD e BCD. Desta forma,

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \text{sen}60^\circ}{2} + \frac{BC \cdot CD}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}$$

$$\boxed{S_{ABCD} = \left(\sqrt{3} + 3\right)\ \text{cm}^2}$$

QUESTÃO 13

A sequência infinita de números naturais $(2022, 12, 5, 25, 29, \ldots)$ possui o primeiro elemento igual a 2022 e cada elemento, a partir do segundo, igual à soma dos quadrados dos algarismos do termo anterior (ou igual ao quadrado do termo anterior, caso este tenha apenas um algarismo). Qual é o 2022º elemento desta sequência?

A) 16
B) 37
C) 58
D) 89
E) 145

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Conforme o enunciado, a sequência $(2022, 12, 5, 25, 29, \ldots)$ possui cada elemento, a partir do segundo, igual à soma dos quadrados dos algarismos do termo anterior (ou igual ao quadrado do termo anterior, caso este tenha apenas um algarismo). É possível comprovar este resultado com os elementos fornecidos e determinar os próximos termos usando esta informação. A ideia é calcular os elementos até que se observe algum padrão:

Posição do elemento na sequência	**Cálculo do elemento**	**Valor do elemento**
1	2022	2022
2	$2^2+0^2+2^2+2^2$	12
3	1^2+2^2	5
4	5^2	25
5	2^2+5^2	29
6	2^2+9^2	85

7	8^2+5^2	89
8	8^2+9^2	145
9	$1^2+4^2+5^2$	42
10	4^2+2^2	20
11	2^2+0^2	4
12	4^2	16
13	1^2+6^2	37
14	3^2+7^2	58
15	5^2+8^2	89
16	8^2+9^2	145
17	$1^2+4^2+5^2$	42
18	4^2+2^2	20
19	2^2+0^2	4
20	4^2	16
21	1^2+6^2	37
22	3^2+7^2	58
23	5^2+8^2	89
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Note que, a partir do sétimo elemento, a sequência apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de 8 números. Os termos que estão numa posição igual a uma unidade a menos do que um múltiplo de 8, ou seja, numa posição do tipo $8n-1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, são todos iguais a 89.

Desta forma, o termo de posição $8 \cdot 252 - 1 = 2015$ é igual a 89. Consequentemente, obedecendo o padrão lógico encontrado, tem-se que:

Posição do elemento na sequência	**Cálculo do elemento**	**Valor do elemento**
2015	89	89
2016	$8^2 + 9^2$	145
2017	$1^2 + 4^2 + 5^2$	42
2018	$4^2 + 2^2$	20
2019	$2^2 + 0^2$	4
2020	4^2	16
2021	$1^2 + 6^2$	37
2022	$3^2 + 7^2$	58

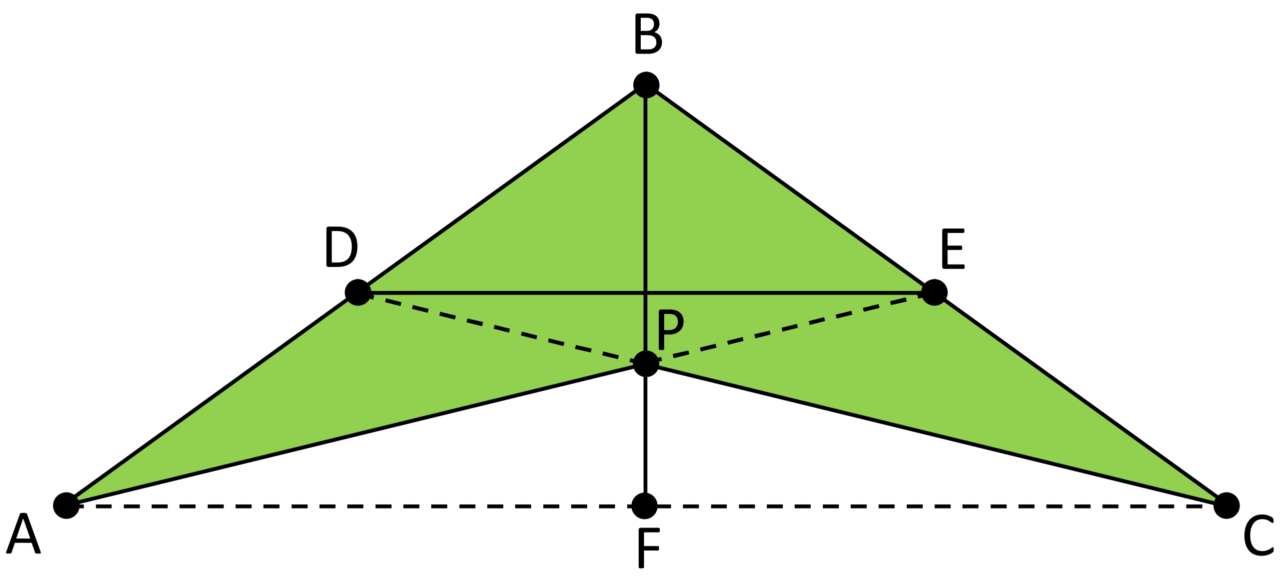
Portanto o 2022º elemento desta sequência é igual a 58.

QUESTÃO 14

A asa-delta é um tipo de planador fabricado com tubos de alumínio, que proporcionam a sua rigidez estrutural, e uma vela feita de tecido, que funciona como uma superfície que sofre forças aerodinâmicas, possibilitando a sua sustentação no ar. Seu nome é devido à semelhança de seu formato com a letra grega Delta (Δ), que tem forma triangular.

Disponível em: http://www.caravanadaaventura.com.br/de-cara-pro-vento/asa-delta. Acesso em 29/01/22 (adaptado)

Um fabricante de asas-deltas, ao desenvolver o projeto de seu produto, esboçou a figura abaixo:



No esboço, D, E e F são os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Além disso, P é o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$. Se a área do triângulo APC é igual a 11,2 m², então a área da asa-delta (região pintada da figura) é:

A) 21,6 m²
B) 22,4 m²
C) 23,5 m²
D) 24,2 m²
E) 24,6 m²

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Como D, E e F são os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, então os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ são as medianas do triângulo ABC e, deste modo, o ponto P é o baricentro do triângulo ABC. Uma das propriedades do baricentro de um triângulo é a de dividir cada mediana na razão 2:1. Desta forma, particularmente, tem-se $AP = 2 \cdot PE$. Logo:

$$AP = \frac{2}{3} \cdot AE \qquad \text{e} \qquad PE = \frac{1}{3} \cdot AE$$

A área do triângulo ACE é igual à metade da área do triângulo ABC, já que ambos possuem a mesma altura relativa às bases $\overline{CE}$ ou $\overline{BC}$ e a base $\overline{CE}$ tem metade da medida da base $\overline{BC}$. Assim, se S é a área do triângulo ABC, então a área do triângulo ACE é

$$S_{ACE} = \frac{S}{2}$$

Da mesma forma, a área do triângulo APC é igual a dois terços da área do triângulo ACE, já que ambos possuem a mesma altura relativa às bases $\overline{AP}$ ou $\overline{AE}$ e a base $\overline{AP}$ tem dois terços da medida da base $\overline{AE}$. Assim, a área do triângulo APC é:

$$S_{APC} = \frac{2}{3} \cdot S_{ACE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{3}$$

O enunciado informa que a área do triângulo APC é igual a 11,2 m². Logo:

$$\frac{S}{3} = 11,2 \Rightarrow \boxed{S = 33,6 \text{ m}^2}$$

Por fim, a área da asa-delta (quadrilátero ABCP) é igual à diferença entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo APC, ou seja:

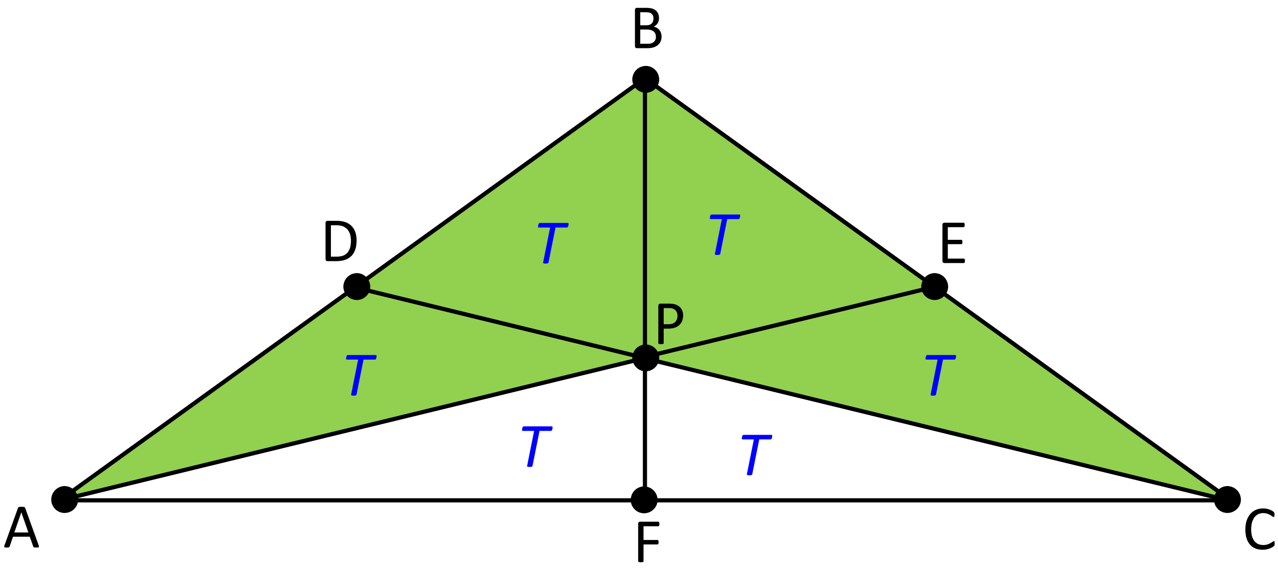
$$S_{ABCP} = S - S_{APC} = 33,6 - 11,2 \Rightarrow \boxed{S_{ABCP} = 22,4 \text{ m}^2}$$

Saiba mais

Uma observação interessante, e que poderia ter sido utilizada para resolver a questão, é que as três medianas sempre dividem um triângulo em outros seis triângulos de mesma área. Para mostrar isso, basta observar que, em nosso problema, a área do triângulo APF é igual à metade da área do triângulo APC, já que ambos possuem a mesma altura relativa às bases $\overline{AF}$ ou $\overline{AC}$ e a base $\overline{AF}$ tem metade da medida da base $\overline{AC}$. Assim, a área do triângulo APF é:

$$T = S_{APF} = \frac{1}{2} \cdot S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{3} = \frac{S}{6}$$

Este mesmo resultado pode ser observado para os triângulos FPC, CPE, EPB, BPD e DPA, tendo, cada um, um sexto da área do triângulo ABC.



Desta forma, como o enunciado informa que a área do triângulo APC é igual a 11,2 m², tem-se que:

$$2T = 11{,}2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 5{,}6\ \text{cm}^2}$$

Logo, a área da asa-delta (quadrilátero ABCP) é:

$$S_{ABCP} = 4 \cdot T = 4 \cdot 5{,}6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{ABCP} = 22{,}4\ \text{m}^2}$$

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 15

Ao final de um campeonato de futebol do qual 20 times participaram, os torcedores ficaram espantados ao verificar que 60% do total de pênaltis desta competição foi marcado para um mesmo time A. Isso facilitou muito a trajetória deste time até o título, mesmo ele tendo um aproveitamento de apenas 50% nas cobranças, o que significa que somente metade das cobranças de pênalti foram convertidas em gol pelo time A. O aproveitamento das cobranças dos demais times, ao contrário, foi de 90%.

Considere um pênalti escolhido aleatoriamente dentre os pênaltis deste campeonato. Sabendo que ele foi convertido em gol, a probabilidade desta marcação ter sido a favor do time A é de, aproximadamente:

A) 45,45%

B) 50%

C) 54,54%

D) 60%

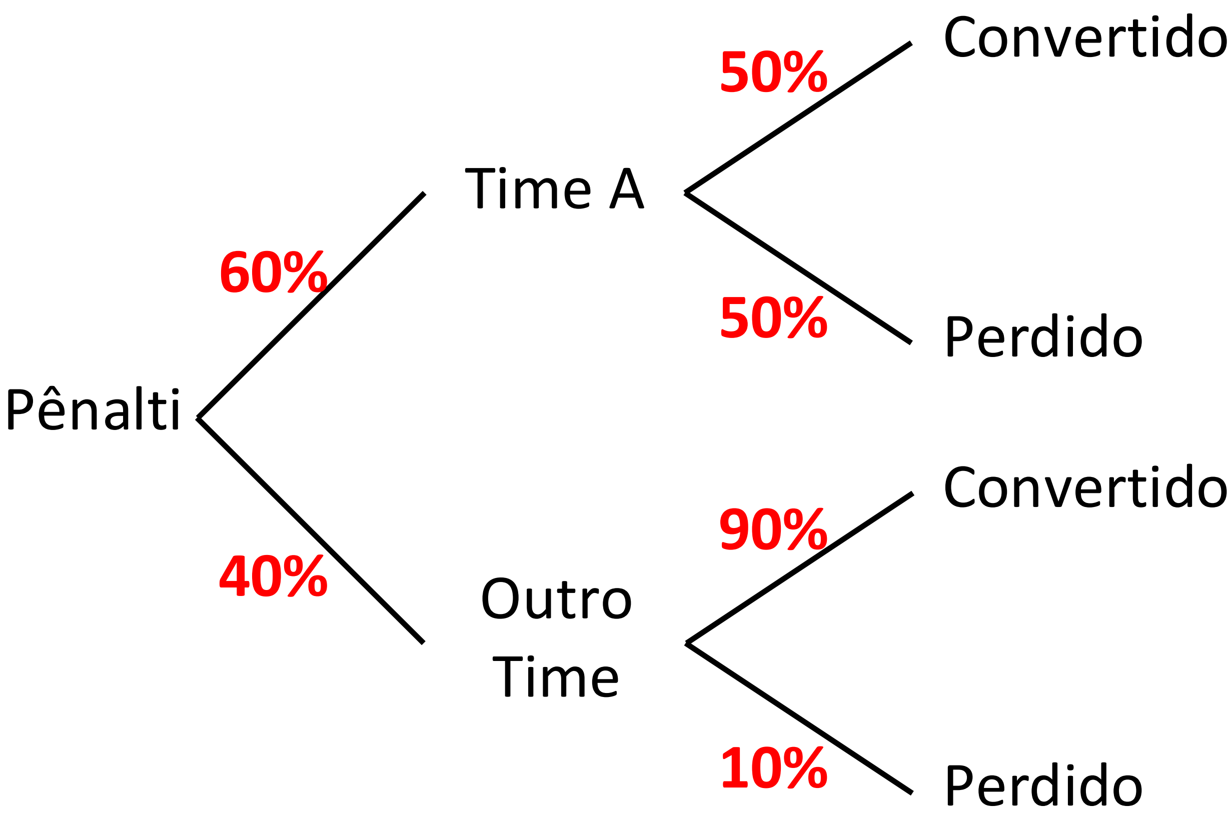
E) 66,67%

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Primeiramente, perceba que, como 60% dos pênaltis foram marcados para o time A, então $100\% - 60\% = 40\%$ foram marcados para os demais times. Além disso, já que 50% dos pênaltis marcados para o time A são convertidos em gol, então $100\% - 50\% = 50\%$ são perdidos e, da mesma forma, já que 90% dos pênaltis marcados para os demais times são convertidos em gol, então $100\% - 90\% = 10\%$ são perdidos.

Considere a árvore de probabilidades a seguir, que resume as informações do enunciado e as conclusões anteriores:



A questão solicita a probabilidade de um pênalti ter sido marcado a favor do time A sabendo que ele foi convertido em gol. Tal probabilidade é simbolizada por $P(\text{Time A}|\text{Convertido})$ e pode ser calculada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Time A}|\text{Convertido}) &= \frac{P(\text{Time A} \cap \text{Convertido})}{P(\text{Convertido})} \\
&= \frac{60\% \cdot 50\%}{60\% \cdot 50\% + 40\% \cdot 90\%} \\
&= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}9} \\
&= \frac{0{,}3}{0{,}3 + 0{,}36} \\
&= \frac{0{,}3}{0{,}66} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11} \\
&\cong 0{,}4545
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\boxed{P(\text{Time A}|\text{Convertido}) \cong 45{,}45\%}$$

QUESTÃO 16

Considere dois triângulos retângulos com lados de medidas inteiras: um com catetos de medidas a e b (sendo $a > b$), e outro com catetos de medidas c e d (sendo $c > d$).
Construindo um outro triângulo retângulo, com catetos de medidas $ad + bc$ e $ac - bd$, pode-se afirmar que a sua hipotenusa:

A) Jamais terá medida inteira.
B) Terá medida igual à soma das medidas das hipotenusas dos primeiros triângulos.
C) Terá medida igual ao produto das medidas das hipotenusas dos primeiros triângulos.
D) Terá medida igual ao produto dos quadrados das medidas das hipotenusas dos primeiros triângulos.
E) Terá medida igual à média geométrica das medidas das hipotenusas dos primeiros triângulos.

RESPOSTA DA QUESTÃO 16: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Sejam:

- T_1 o triângulo retângulo com catetos de medidas a e b (sendo $a > b$) e hipotenusa de medida h_1;
- T_2 o triângulo retângulo com catetos de medidas c e d (sendo $c > d$) e hipotenusa de medida h_2;
- T_3 o triângulo retângulo com catetos de medidas $ad + bc$ e $ac - bd$ e hipotenusa de medida h_3.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos T_1, T_2 e T_3 tem-se que:

- Triângulo retângulo T_1:

$$h_1^2 = a^2 + b^2$$

- Triângulo retângulo T_2:

$$h_2^2 = c^2 + d^2$$

- Triângulo retângulo T_3:

$$h_3{}^2 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$$

$$h_3{}^2 = (ad)^2 + \cancel{2abcd} + (bc)^2 + (ac)^2 - \cancel{2abcd} + (bd)^2$$

$$h_3{}^2 = (ad)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + (bd)^2$$

$$h_3{}^2 = a^2d^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2d^2$$

$$h_3{}^2 = a^2\left(c^2+d^2\right) + b^2\left(c^2+d^2\right)$$

$$h_3{}^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

$$h_3{}^2 = h_1{}^2 \cdot h_2{}^2$$

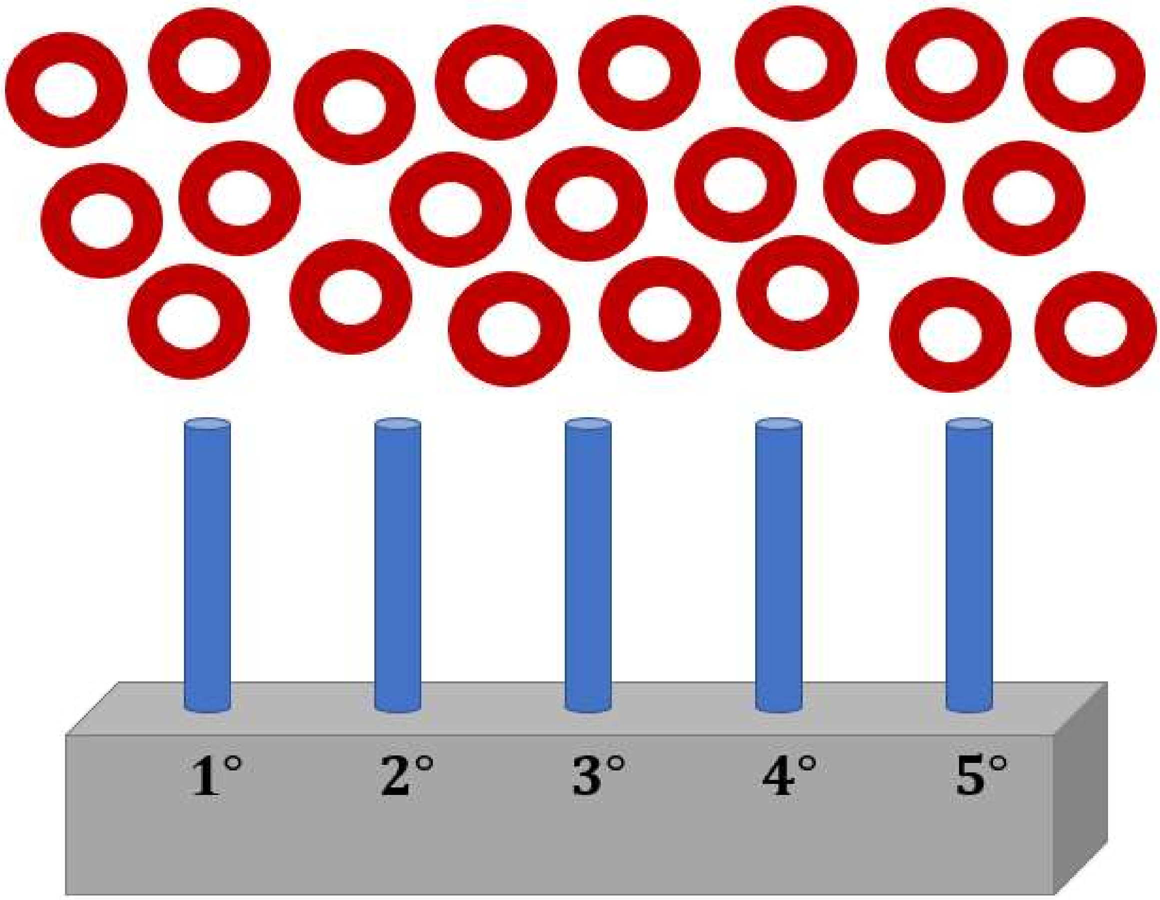
$$\boxed{h_3 = h_1 \cdot h_2}$$

Portanto, a hipotenusa do triângulo retângulo T_3 tem medida igual ao produto das medidas das hipotenusas dos triângulos T_1 e T_2.

QUESTÃO 17

Cinco pinos, conforme a figura abaixo, irão receber 22 argolas idênticas de forma que:

- O 1º pino fique com, no mínimo, 2 argolas;
- O 2º pino fique com, no mínimo, 1 argola;
- O 3º pino fique com, no mínimo, 4 argolas;
- O 4º pino não tenha restrição quanto ao número mínimo de argolas a serem colocadas nele;
- O 5º pino fique com, no mínimo, 3 argolas.



Se em cada pino cabem, no máximo, 5 argolas, a quantidade de maneiras diferentes com que se pode alocar todas as 22 argolas nos 5 pinos de acordo com as restrições descritas é:

A) 16
B) 26
C) 29
D) 33
E) 35

RESPOSTA DA QUESTÃO 17: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Como cabem, no máximo, 5 argolas por pino, então, nos 5 pinos, cabem, no máximo, 25 argolas. Assim, alocar 22 argolas nos pinos é equivalente a pegar os pinos todos cheios e, posteriormente, retirar 3 argolas deles. Esta é uma maneira mais simples de se pensar e fazer a contagem solicitada. Há apenas três maneiras de isso acontecer:

- <u>1ª possibilidade</u>: Com os pinos todos cheios, retirar 1 argola de 3 pinos diferentes.

  Seguindo as restrições do problema, pode-se retirar 1 argola de qualquer pino. Assim, a quantidade de maneiras de se escolher os três pinos que terão 1 argola retirada é igual à combinação de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja,

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2} = 10$$

- 2ª possibilidade: Com os pinos todos cheios, retirar 2 argolas de um pino e 1 argola de outro.

  Seguindo as restrições do problema, pode-se retirar 2 argolas apenas do 1º, 2º, 4º e 5º pinos, o que oferece um total de 4 opções de escolha nesta etapa. Para cada escolha dessa etapa, há outras 4 opções de escolha do pino que terá 1 argola retirada. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de maneiras de se retirar 2 argolas de um pino e 1 argola de outro é:

$$\underset{\substack{\text{Opções de escolha}\\ \text{do pino que terá}\\ \text{2 argolas retiradas}}}{\underline{\quad\quad 4 \quad\quad}} \cdot \underset{\substack{\text{Opções de escolha}\\ \text{do pino que terá}\\ \text{1 argola retirada}}}{\underline{\quad\quad 4 \quad\quad}} = 16$$

- 3ª possibilidade: Com os pinos todos cheios, retirar 3 argolas de um só pino.

  Seguindo as restrições do problema, pode-se retirar 3 argolas apenas do 1º, 2º e 4º pinos, o que oferece um total de apenas 3 opções de escolha.

Portanto, a quantidade de maneiras diferentes com que se pode alocar todas as 22 argolas nos 5 pinos de acordo com as restrições descritas é:

$$10 + 16 + 3 = \boxed{29}$$

QUESTÃO 18

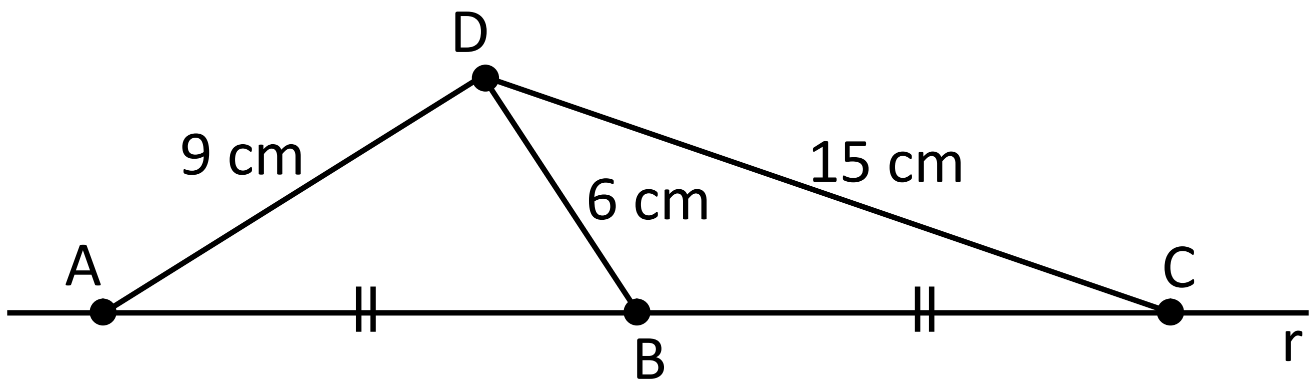
Sejam A, B e C três pontos de uma reta r, na qual B é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$. Considere um ponto D, não pertencente a r, tal que $AD = 9$ cm, $BD = 6$ cm e $CD = 15$ cm. A área do triângulo ACD, em cm², é igual a:

A) 48
B) 50
C) 52
D) 54
E) 56

RESPOSTA DA QUESTÃO 18: Alternativa D

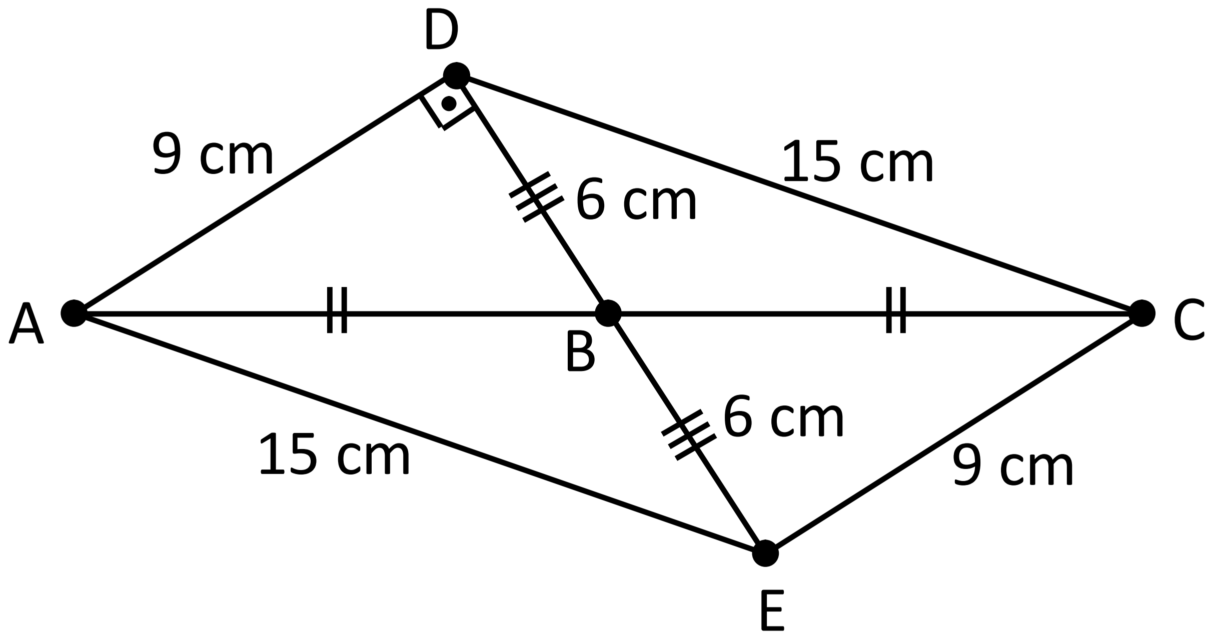
RESOLUÇÃO

A figura abaixo ilustra o que está descrito no enunciado:



Agora, considere o ponto E, simétrico de D em relação a B. Dessa forma, B é ponto médio tanto de $\overline{AC}$ quanto de $\overline{DE}$, que são as diagonais do quadrilátero ADCE. Uma vez que as diagonais desse quadrilátero se intersectam nos seus pontos médios, conclui-se que ADCE é, necessariamente, um paralelogramo, com $AD = CE = 9$ cm e $CD = AE = 15$ cm. Dessa forma, o triângulo ADE tem lados medindo $AD = 9$ cm, $DE = 12$ cm e $AE = 15$ cm. Pela recíproca do Teorema de

Pitágoras, como $9^2 + 12^2 = 15^2$, então o triângulo ADE é retângulo em D.



Além disso, como $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ são as diagonais do paralelogramo ADCE, então as áreas dos triângulos ACD e ADE são iguais, já que cada uma delas é igual à metade da área do paralelogramo.

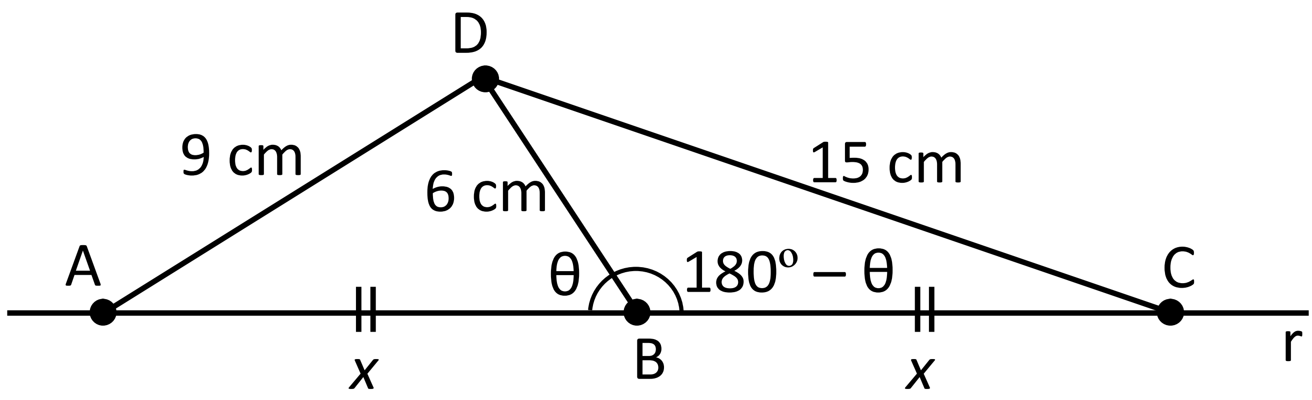
Como ADE é um triângulo retângulo em D, sua área é

$$S_{ADE} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \text{ cm}^2$$

Logo, a área do triângulo ACD também é igual a 54 cm^2.

Resolução Alternativa

Considere a figura abaixo, que ilustra o que está descrito no enunciado e destaca os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$, de medidas θ e $180^\circ - \theta$, respectivamente.



Sendo x a medida de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, tem-se, aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABD e BCD:

$$\begin{cases} 9^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos\theta \\ 15^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos(180^\circ - \theta) \end{cases}$$

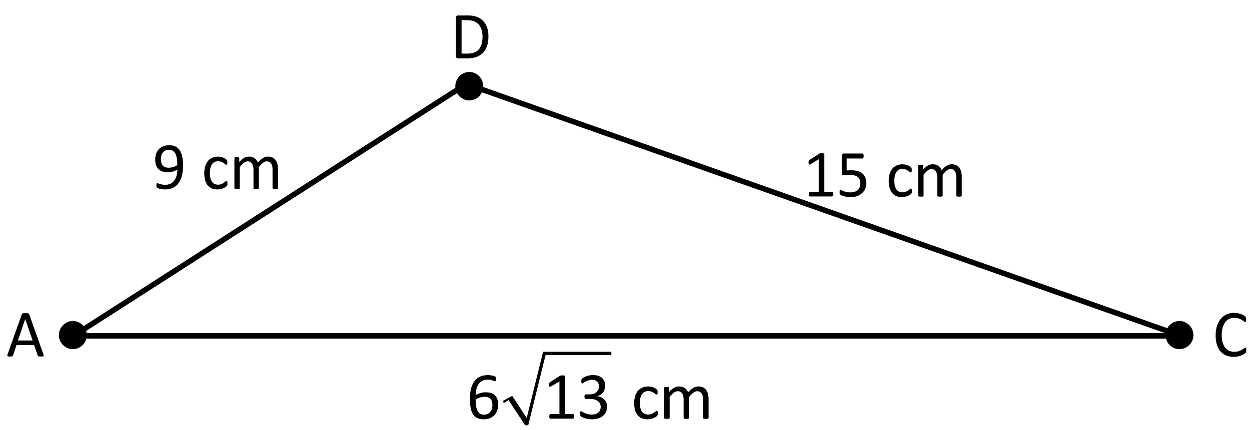
Uma vez que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$:

$$\begin{cases} 81 = 36 + x^2 - 12 \cdot x \cdot \cos\theta \\ 225 = 36 + x^2 + 12 \cdot x \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, obtém-se:

$$81+225=36+36+x^2+x^2$$
$$306=72+2x^2$$
$$234=2x^2$$
$$x^2=117=9\cdot 13$$
$$\boxed{x=3\sqrt{13}\ \text{cm}}$$

Deste modo, $AC=2x=6\sqrt{13}$ cm. A figura a seguir ilustra o triângulo ACD com as medidas de seus lados:



O semiperímetro do triângulo ACD é:

$$p=\frac{9+15+6\sqrt{13}}{2}=\left(12+3\sqrt{13}\right)\ \text{cm}$$

Pela fórmula de Herão, tem-se que a área do triângulo ACD é:

$$S_{ACD}=\sqrt{p\cdot\left(p-6\sqrt{13}\right)\cdot(p-9)\cdot(p-15)}$$

Observe que:

$$p\cdot\left(p-6\sqrt{13}\right)\cdot(p-9)\cdot(p-15)=$$

$$=\underbrace{\left(12+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(12-3\sqrt{13}\right)}\cdot\underbrace{\left(3\sqrt{13}+3\right)\cdot\left(3\sqrt{13}-3\right)}=$$

$$=(144-117)\cdot(117-9)=$$

$$=27\cdot108=$$

$$=27\cdot2\cdot54=$$

$$=54\cdot54=$$

$$=54^2$$

Logo,

$$S_{ACD} = \sqrt{54^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{ACD} = 54 \text{ cm}^2}$$

QUESTÃO 19

Seja $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(n)=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

Pode-se afirmar que a soma

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(9998)+f(9999)$$

é igual a:

A) 0,99
B) 1
C) 1,01
D) 1,010101...
E) 1,111...

RESPOSTA DA QUESTÃO 19: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Racionalizando o denominador da fração que define a função dada, tem-se que:

$$f(n)=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\times\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}$$

$$f(n)=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\cdot n-n^2\cdot(n+1)}$$

$$f(n)=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n\cdot(n+1)\left[(n+1)-n\right]}$$

$$f(n)=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n\cdot(n+1)}$$

$$f(n)=\frac{\cancel{(n+1)}\sqrt{n}}{n\cdot\cancel{(n+1)}}-\frac{\cancel{n}\sqrt{n+1}}{\cancel{n}\cdot(n+1)}$$

$$\boxed{f(n)=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}}$$

Desta forma:

$$f(1)=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(3)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4}$$

$$f(4)=\frac{\sqrt{4}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\vdots$$

$$f(9997)=\frac{\sqrt{9997}}{9997}-\frac{\sqrt{9998}}{9998}$$

$$f(9998)=\frac{\sqrt{9998}}{9998}-\frac{\sqrt{9999}}{9999}$$

$$f(9999)=\frac{\sqrt{9999}}{9999}-\frac{\sqrt{10000}}{10000}$$

Somando todas as identidades anteriores membro a membro, obtém-se, no primeiro membro, a soma solicitada e, no segundo, uma soma telescópica na qual a última parcela de cada identidade se cancela com a primeira parcela da próxima, quando existir. As únicas parcelas que não se cancelam no segundo membro são a primeira parcela da primeira identidade e a última parcela da última identidade. Assim:

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(9998)+f(9999)=$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{10000}}{10000}=$$

$$=1-\frac{100}{10000}=$$

$$=1-0{,}01=$$

$$=\boxed{0{,}99}$$

QUESTÃO 20

Se cada uma das letras D, O, I, S, T, R e E representar um algarismo diferente, com D e T não nulos, é possível obtermos, dependendo das escolhas feitas, $\text{DOIS} + \text{TRES} = \text{SETE}$. Por exemplo, fazendo $D = 7$, $O = 1$, $I = 3$, $S = 9$, $T = 2$, $R = 6$ e $E = 8$, temos que cada letra representa um algarismo diferente, com D e T não nulos, e:

$$\begin{array}{r} \text{DOIS} \\ + \ \text{TRES} \\ \hline \text{SETE} \end{array} \quad \text{pois} \quad \begin{array}{r} 7139 \\ + \ 2689 \\ \hline 9828 \end{array}$$

Existem outras escolhas possíveis para as letras D, O, I, S, T, R e E que satisfazem estas mesmas propriedades. Duas delas originam o menor valor possível para SETE. Para qualquer destas duas escolhas, temos que a diferença entre SEIS e SETE (ou seja, $\text{SEIS} - \text{SETE}$) é:

A) -5
B) 16

C) 47

D) 68

E) 84

RESPOSTA DA QUESTÃO 20: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Para que o problema seja resolvido, deve-se, primeiramente, determinar quais são as escolhas para as letras D, O, I, S, T, R e E que originam o menor valor possível para SETE. Uma maneira de se fazer isso, é analisar a expressão $DOIS+TRES=SETE$ a partir do algoritmo da adição, como apresentado no enunciado:

$$\begin{array}{r} DOIS \\ +\ TRES \\ \hline SETE \end{array}$$

Observe que S pode ser igual a $D+T$ ou a $D+T+1$. Este último caso acontece quando ocorre o “vai 1” nos algarismos do milhar no algoritmo da adição.

Como, segundo as restrições do enunciado, D e T são não nulos e distintos, então o menor valor possível para $D+T$ é $1+2=3$. Logo, de início, já se sabe que S não pode ser nem 0, nem 1 e nem 2.

Já que o objetivo inicial é determinar as escolhas para letras D, O, I, S, T, R e E que originam o menor valor possível para SETE, então é necessário verificar, primeiramente, se S pode ser igual a 3. Há dois casos para se analisar:

- <u>1º caso para S=3</u>: $D=1$, $T=2$ e não ocorre o "vai 1" nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$\begin{array}{cccc|c|} & 1 & \underline{O} & \underline{I} & 3 \\ + & 2 & \underline{R} & \underline{E} & 3 \\ \hline & 3 & \underline{E} & 2 & \underline{E} \end{array}$$

Neste caso, tem-se $E=6$:

$$\begin{array}{ccc|c|c} & 1 & \underline{O} & \underline{I} & 3 \\ + & 2 & \underline{R} & 6 & 3 \\ \hline & 3 & 6 & 2 & 6 \end{array}$$

Observando o algoritmo acima, note que seria necessário ter $I = 6 = E$, o que não é possível já que cada letra representa um algarismo diferente.

- <u>2º caso para $S=3$</u>: $D = 2$, $T = 1$ e não ocorre o “vai 1” nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & \underline{O} & \underline{I} & 3 \\
+ & 1 & \underline{R} & \underline{E} & 3 \\
\hline
 & 3 & \underline{E} & 1 & \underline{E}
\end{array}
$$

Neste caso, tem-se $E = 6$:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & \underline{O} & \underline{I} & 3 \\
+ & 1 & \underline{R} & 6 & 3 \\
\hline
 & 3 & 6 & 1 & 6
\end{array}
$$

Assim, tem-se $I = 5$ e “vai 1” nos algarismos da centena:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 2 & \underline{O} & 5 & 3 \\
+ & 1 & \underline{R} & 6 & 3 \\
\hline
 & 3 & 6 & 1 & 6
\end{array}
$$

Por fim, note que é necessário ter $1 + O + R = 6$. Neste caso, tem-se as seguintes possibilidades para o par de algarismos (O,R): $(0,5)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$ e $(5,0)$. Porém, nenhuma dessas possibilidades é válida, já que, em todas, há um ou mais algarismo já utilizado para outra letra.

Perceba que as duas únicas possibilidades de se obter $S = 3$ estão descartadas. Assim, o próximo passo é verificar se é possível que se tenha S igual a 4. Há, exatamente, quatro casos para se analisar:

- <u>1º caso para S=4</u>: $D=1$, $T=2$ e ocorre o "vai 1" nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & & \\
 & 1 & \underline{O} & \underline{I} & 4 \\
+ & 2 & \underline{R} & \underline{E} & 4 \\
\hline
 & 4 & \underline{E} & 2 & \underline{E}
\end{array}
$$

Neste caso, tem-se $E=8$:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & & \\
 & 1 & \underline{O} & \underline{I} & 4 \\
+ & 2 & \underline{R} & 8 & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & 2 & 8
\end{array}
$$

Observando o algoritmo acima, note que seria necessário ter $I=4=S$, o que não é possível já que cada letra representa um algarismo diferente.

- <u>2º caso para S=4</u>: $D=2$, $T=1$ e ocorre o "vai 1" nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & \\
 & 2 & \underline{O} & \underline{I} & 4 \\
+ & 1 & \underline{R} & \underline{E} & 4 \\
\hline
 & 4 & \underline{E} & 1 & \underline{E}
\end{array}
$$

Neste caso, tem-se $E=8$:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & \\
 & 2 & \underline{O} & \underline{I} & 4 \\
+ & 1 & \underline{R} & 8 & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & 8
\end{array}
$$

Assim, tem-se $I=3$ e "vai 1" nos algarismos da centena:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & & \\
 & 2 & \underline{O} & 3 & 4 \\
+ & 1 & \underline{R} & 8 & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & 8
\end{array}
$$

Por fim, note que é necessário ter $1+O+R=18$. Neste caso, tem-se apenas duas possibilidades para o par de algarismos (O,R): $(8,9)$ e $(9,8)$. Porém, nenhuma dessas possibilidades é válida, já que, em ambas, há um algarismo já utilizado para outra letra.

- <u>3º caso para S=4</u>: $D=3$, $T=1$ e não ocorre o "vai 1" nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & \underline{O} & \underline{I} & \boxed{4} \\
+ & 1 & \underline{R} & \underline{E} & \boxed{4} \\
\hline
 & 4 & \underline{E} & 1 & \boxed{\underline{E}}
\end{array}
$$

Neste caso, tem-se $E=8$:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 3 & \underline{O} & \boxed{\underline{I}} & 4 \\
+ & 1 & \underline{R} & \boxed{8} & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & \boxed{1} & 8
\end{array}
$$

Observando o algoritmo acima, note que seria necessário ter $I=3=D$, o que não é possível já que cada letra representa um algarismo diferente.

- <u>4º caso para S=4</u>: $D=1$, $T=3$ e não ocorre o "vai 1" nos algarismos do milhar no algoritmo da adição

$$
\begin{array}{r c c c}
 & 1 & \underline{O} & \underline{I} & \boxed{4} \\
+ & 3 & \underline{R} & \underline{E} & \boxed{4} \\
\hline
 & 4 & \underline{E} & 3 & \boxed{\underline{E}}
\end{array}
$$

Neste caso, tem-se $E=8$:

$$
\begin{array}{r c c c}
 & 1 & \underline{O} & \boxed{\underline{I}} & 4 \\
+ & 3 & \underline{R} & \boxed{8} & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & \boxed{3} & 8
\end{array}
$$

Assim, tem-se $I=5$ e "vai 1" nos algarismos da centena:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & \boxed{\underline{O}} & 5 & 4 \\
+ & 3 & \underline{R} & 8 & 4 \\
\hline
 & 4 & 8 & 3 & 8
\end{array}
$$

Por fim, note que é necessário ter $1+O+R=8$. Neste caso, tem-se as seguintes possibilidades para o par de algarismos (O,R): $(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$ e $(7,0)$. Note que apenas os pares $(0,7)$ e $(7,0)$ são válidos, já que são os únicos que não apresentam algarismo já utilizado para outra letra.

Em toda a análise feita, tanto para $S=3$ quanto para $S=4$, note que apenas este último caso forneceu uma escolha possível para as letras D, O, I, S, T, R e E. Portanto, o menor valor possível para SETE é obtido com as escolhas determinadas neste caso, ou seja:

$$D=1,\ O=0,\ I=5,\ S=4,\ T=3,\ R=7 \text{ e } E=8$$

ou

$$D=1,\ O=7,\ I=5,\ S=4,\ T=3,\ R=0 \text{ e } E=8$$

Para qualquer destas duas escolhas, temos $\text{SEIS} = 4854$ e $\text{SETE} = 4838$, cuja diferença é:

$$\text{SEIS} - \text{SETE} = 4854 - 4838 = \boxed{16}$$

QUESTÃO 21

Seja f uma função polinomial real de coeficientes reais com grau 2022 e coeficiente líder igual a 1, ou seja,

$$f(x) = 1x^{2022} + a_{2021} \cdot x^{2021} + a_{2020} \cdot x^{2020} +$$
$$+ \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

sendo a_{2021}, a_{2020}, ..., a_1, a_0 números reais.

Sabe-se que,

$$f(0) = 2021$$
$$f(1) = 2020$$
$$f(2) = 2019$$
$$\vdots$$
$$f(2019) = 2$$
$$f(2020) = 1$$
$$f(2021) = 0$$

Note que, para $n \in \{0,1,2,3,...,2020\}$, tem-se $f(n+1) = f(n) - 1$.

O valor de $f(2022)$ é:

A) – 1
B) 2021 – 1
C) 2021! – 1
D) 2022 – 1
E) 2022! – 1

RESPOSTA DA QUESTÃO 21: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Observe que, para $n \in \{0,1,2,3,...,2020,2021\}$, o valor numérico da função para $x = n$, denotado por $f(n)$, é igual a $2021 - n$.

Deste modo, como f é uma função polinomial real de coeficientes reais com grau 2022 e coeficiente líder igual a 1, pode-se concluir que:

$$f(x) = 1 \cdot (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \ldots \cdot (x-2020) \cdot (x-2021) + (2021 - x)$$

Desta forma,

$$f(2022) = (2022-0) \cdot (2022-1) \cdot (2022-2) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot \ldots \cdot (2022-2021) + (2021-2022)$$

$$f(2022) = 2022 \cdot 2021 \cdot 2020 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 - 1$$

$$\boxed{f(2022) = 2022! - 1}$$