OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

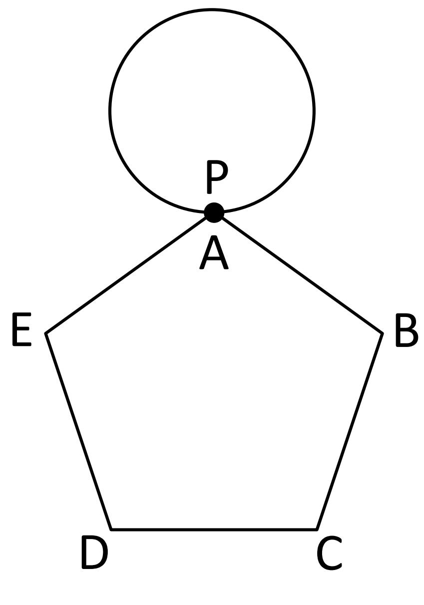
OMIF 2021

Resolução Comentada da Prova de Primeira Fase

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

O ponto P de uma circunferência cujo raio mede $3\ \mathrm{cm}$ coincide com o vértice A de um pentágono regular ABCDE cujo lado mede $2\pi\ \mathrm{cm}$, como mostra a figura abaixo (A e P são os únicos pontos em comum neste instante).



A partir deste momento, a circunferência começa a girar sobre o pentágono, sem deslizar, no sentido horário. Consideramos que a circunferência completou uma volta quando o ponto P toca o pentágono novamente.

Quando a circunferência completar 2021 voltas, o ponto P estará coincidindo com o vértice:

A) A

B) B

C) C

D) D

E) E

RESPOSTA DA QUESTÃO 01: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que o perímetro da circunferência é $2\pi R = 2\pi \times 3 = 6\pi\ cm$ e que o perímetro do pentágono regular é $5 \times 2\pi = 10\pi\ cm$. Observe, também, que cada volta completa da circunferência percorre o equivalente a 3 arestas do pentágono regular.

Assim, a relação entre o número de voltas dadas pela circunferência e o vértice do pentágono regular que coincide com o ponto P é:

- 0 volta $\rightarrow A$
- 1 volta $\rightarrow D$
- 2 voltas $\rightarrow B$
- 3 voltas $\rightarrow E$

- 4 voltas → C
- **5 voltas →** $\boldsymbol{A}$
- 6 voltas → D
- 7 voltas → B
- 8 voltas → E
- 9 voltas → C
- **10 voltas →** $\boldsymbol{A}$
- 11 voltas → D
- 12 voltas → B
- 13 voltas → E
- 14 voltas → C
- **15 voltas →** $\boldsymbol{A}$
- 16 voltas → D

⋮

- **2015 voltas → $\boldsymbol{A}$**
- 2016 voltas → D
- 2017 voltas → B
- 2018 voltas → E
- 2019 voltas → C
- **2020 voltas → $\boldsymbol{A}$**
- 2021 voltas → D

Note que, para um número de voltas da circunferência múltiplo de 5, o ponto P coincide com o vértice A. Dessa forma, quando a circunferência completar 2020 voltas, o ponto P estará coincidindo com o vértice A e, quando completar 2021 voltas, o ponto P estará coincidindo com o **vértice $\boldsymbol{D}$**.

QUESTÃO 02

Em um evento realizado pela OMIF, estavam presentes, ao todo, 180 paulistas, 150 mineiros e 122 cariocas. Num determinado momento, um grupo de paulistas teve que se retirar. Após a saída desse grupo, os paulistas restantes passaram a representar 36% dos integrantes remanescentes do evento.

Em relação aos 180 paulistas que estavam presentes no evento inicialmente, o grupo que se retirou representava um percentual entre:

A) 10% e 13%

B) 13% e 16%

C) 16% e 19%

D) 19% e 22%

E) 22% e 25%

RESPOSTA DA QUESTÃO 02: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Num primeiro momento, estavam presentes, ao todo, $180 + 150 + 122 = 452$ pessoas no evento. Se x paulistas se retiraram do local, então $(452 - x)$ pessoas permaneceram no evento, sendo que, destes, $(180 - x)$ eram paulistas.

Como os paulistas restantes passaram a representar 36% dos integrantes remanescentes do evento, tem-se:

$$(180 - x) = 0{,}36(452 - x)$$

$$180 - x = 162{,}72 - 0{,}36x$$

$$180 - 0{,}64x = 162{,}72$$

$$-\ 0{,}64x = -\ 17{,}28 \qquad \times (-\ 1)$$

$$0{,}64x = 17{,}28$$

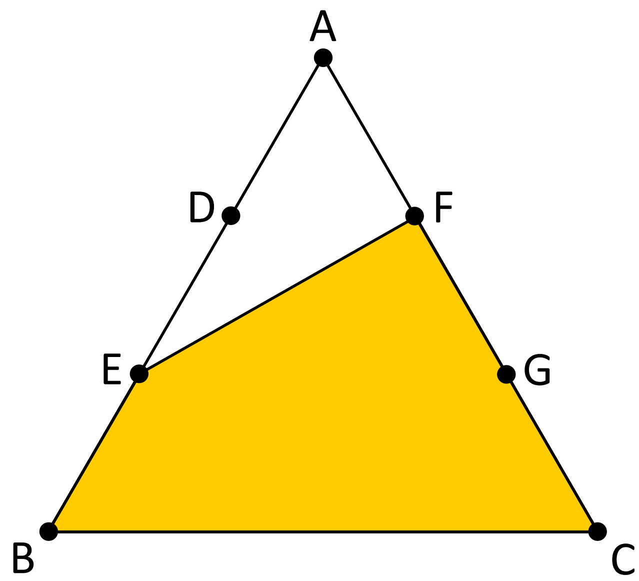
$$\boldsymbol{x = 27}$$

Portanto, em relação aos 180 paulistas que estavam presentes no evento inicialmente, o grupo que se retirou representava

$$\frac{27}{180} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = \mathbf{15\%}$$

QUESTÃO 03

O triângulo equilátero ABC tem área igual a $234\ \mathrm{cm}^2$. Os pontos D e E dividem o lado $\overline{\mathrm{AB}}$ em 3 partes iguais e os pontos F e G dividem o lado $\overline{\mathrm{AC}}$ em 3 partes iguais.



A área do quadrilátero BEFC, em cm^2, é:

A) 156

B) 169

C) 182

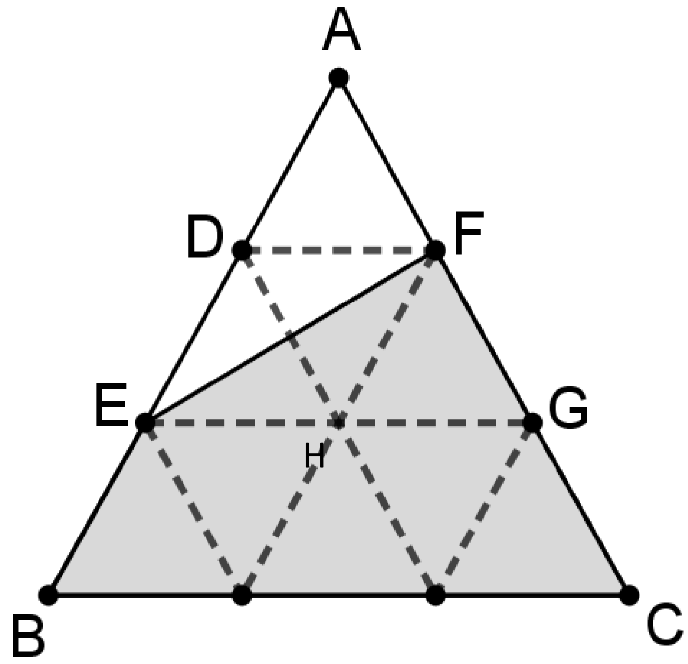
D) 190

E) 195

RESPOSTA DA QUESTÃO 03: Alternativa C
RESOLUÇÃO

SOLUÇÃO 01:

Na figura a seguir, cada segmento tracejado é paralelo a algum lado do triângulo equilátero ABC, fazendo com que os 9 pequenos triângulos formados tenham todos os seus ângulos internos com medidas iguais a $60°$. Logo, todos esses 9 triângulos também são equiláteros. Além disso, por possuírem lados em comum, pode-se concluir que eles são todos congruentes.



Assim, cada um dos 9 triângulos equiláteros menores tem área igual a $\frac{234}{9} = 26\ cm^2$.

Agora, note que $\overline{EF}$ é a diagonal de um losango formado por 2 triângulos equiláteros menores. Logo, a área do triângulo EFH corresponde à metade da área do losango, ou seja, à área de um triângulo equilátero menor.

Sendo assim, o quadrilátero $BEFC$ tem área equivalente à de 7 triângulos equiláteros menores, ou seja:

$$A_{BEFC} = 26 \times 7 = \mathbf{182\ cm^2}$$

SOLUÇÃO 02:

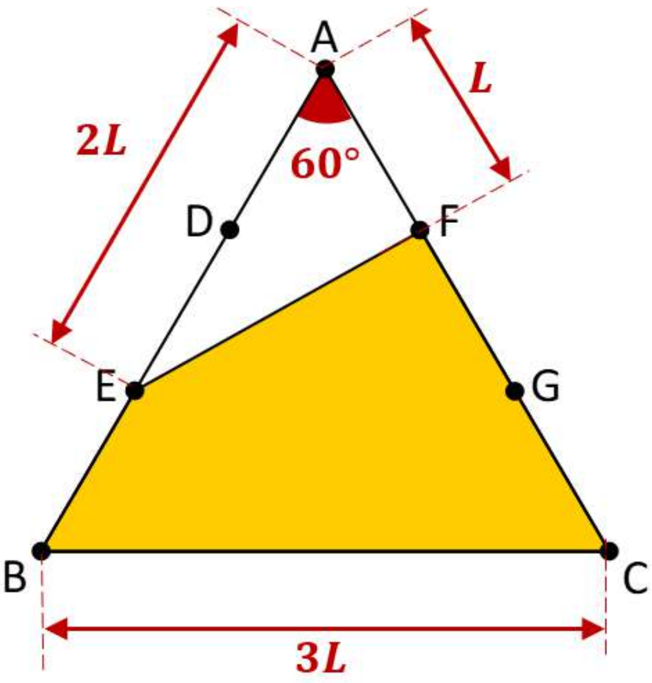
Suponha que o lado do triângulo equilátero ABC tenha comprimento igual a $3L$. Neste caso, como sua área é igual a $234\ \mathrm{cm}^2$, tem-se que:

$$\frac{(3L)^2\sqrt{3}}{4} = 234 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9L^2\sqrt{3}}{4} = 234 \quad \Leftrightarrow$$

$$L^2\sqrt{3} = \frac{234 \times 4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{L^2\sqrt{3} = 104}$$

Agora, como os pontos D e E dividem o lado $\overline{\mathrm{AB}}$ em 3 partes iguais e os pontos F e G dividem o lado $\overline{\mathrm{AC}}$ em 3 partes iguais, tem-se que $\overline{\mathrm{AE}}$ e $\overline{\mathrm{AF}}$

medem, respectivamente, $2L$ e L. Além disso, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60°, pois é ângulo interno de um triângulo equilátero.



Assim, a área do triângulo EAF é:

$$A_{AEF} = \frac{1}{2} \times 2L \times L \times \operatorname{sen} 60°$$

$$A_{AEF} = L^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{AEF} = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{AEF} = \frac{104}{2}$$

$$\boldsymbol{A_{AEF} = 52\ cm^2}$$

Logo,

$$A_{BEFC} = A_{ABC} - A_{AEF}$$

$$A_{BEFC} = 234 - 52$$

$$\boldsymbol{A_{BEFC} = 182\ cm^2}$$

QUESTÃO 04

Tatiane pensa em um número e pergunta ao seu amigo, João, se ele consegue descobrir que número é esse. Para isso, ela fornece duas informações para ele:

(1) O número é inteiro positivo e o produto dele pelo seu antecessor é igual a 4830.

(2) Se acrescentarmos 30 unidades ao número pensado e, depois, calcularmos 70% do valor obtido, o resultado será o próprio número pensado.

Sobre a suficiência destas informações para que João possa descobrir qual é o número que Tatiane pensou, podemos concluir que:

A) A informação 1, sozinha, é suficiente para responder à pergunta, mas a informação 2, sozinha, não é suficiente.

B) A informação 2, sozinha, é suficiente para responder à pergunta, mas a informação 1, sozinha, não é suficiente.

C) As duas informações, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas sozinha é suficiente.

D) Tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

E) A pergunta não pode ser respondida só com as duas informações fornecidas.

RESPOSTA DA QUESTÃO 04: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Seja x o número que Tatiane pensou. Analisando as informações fornecidas por ela, tem-se:

- Informação $(\mathbf{1})$:

$$x(x - 1) = 4830$$

$$x^2 - x = 4830$$

$$x^2 - x + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right) = 4830 + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19321}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{19321}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{139}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 70} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{x = -69}$$

Como o número pensado é inteiro positivo, conclui-se que $\boldsymbol{x = 70}$.

- Informação $(\mathbf{2})$:

$$(x + 30) \times 0{,}70 = x$$

$$0{,}7x + 21 = x$$

$$0{,}3x = 21$$

$$\boldsymbol{x = 70}$$

Logo, tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

QUESTÃO 05

Um baralho composto por 40 cartas idênticas, exceto pela cor e numeração, tem, exatamente,

- x cartas azuis, numeradas de 1 a x;
- x^2 cartas brancas, numeradas de 1 a x^2;
- $x+5$ cartas pretas, numeradas de 1 a $x+5$.

Retirando-se, aleatoriamente, uma carta deste baralho, qual é a probabilidade de ela ser branca ou ser numerada com um múltiplo de 5?

A) $\frac{7}{10}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{33}{40}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 05: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Primeiramente, é necessário determinar o valor de x (inteiro positivo) de acordo com a distribuição das cartas. Como são 40 cartas no total, tem-se que:

$$x + x^2 + x + 5 = 40$$

$$x^2 + 2x + 5 = 40$$

$$x^2 + 2x + 5 - \mathbf{4} = 40 - \mathbf{4}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 36$$

$$(x + 1)^2 = 36$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{36}$$

$$x + 1 = \pm 6$$

$$x = -1 \pm 6$$

$$\boldsymbol{x' = 5} \ \boldsymbol{(V)} \quad \text{ou} \quad x'' = -7 \ \boldsymbol{(F)}$$

Desta forma, o baralho contém:

- 5 cartas azuis, numeradas de 1 a 5
- 25 cartas brancas, numeradas de 1 a 25
- 10 cartas pretas, numeradas de 1 a 10

Assim, tem-se:

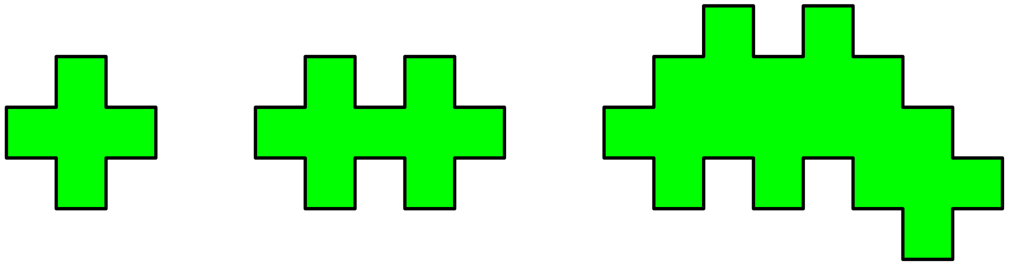
- 1 carta azul numerada com um múltiplo de 5.
- 25 cartas brancas.
- 2 cartas pretas numeradas com um múltiplo de 5.

Portanto, retirando-se, aleatoriamente, uma carta deste baralho, a probabilidade de ela ser branca ou ser numerada com um múltiplo de 5 é

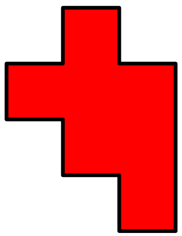
$$\frac{(1 + 25 + 2)}{40} = \frac{28}{40} = \mathbf{\frac{7}{10}}$$

QUESTÃO 06

Um polígono é chamado “maisera” se todos os seus lados medem 1 unidade de comprimento e se os lados adjacentes sempre formam um ângulo reto. As figuras abaixo ilustram alguns polígonos “maisera”.



Já a figura a seguir não se trata de um polígono “maisera”, pois um de seus lados mede 3 unidades de comprimento.



Dentre as alternativas abaixo, qual é a única que pode corresponder ao perímetro de um polígono “maisera”, em unidades de comprimento?

A) 2018

B) 2019

C) 2020

D) 2021

E) 2022

RESPOSTA DA QUESTÃO 06: Alternativa C

RESOLUÇÃO

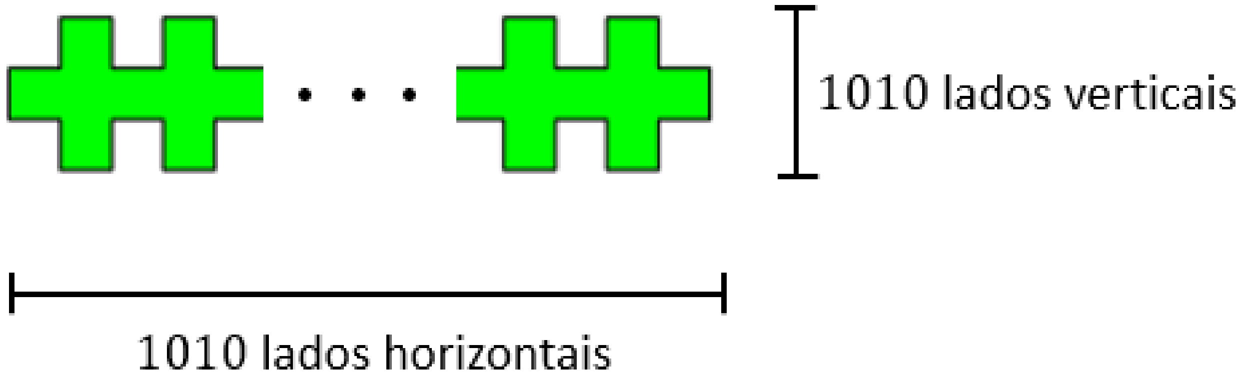
Percorrendo os lados de um polígono “maisera”, a partir de qualquer vértice, no sentido horário, até chegar ao mesmo ponto de partida, pode-se observar que o número de deslocamentos verticais é igual ao número de deslocamentos horizontais, já que que todos os lados adjacentes sempre se encontram sob um ângulo reto. Observe também que o número de deslocamentos horizontais para esquerda é igual ao número de deslocamentos horizontais para direita, pois o vértice de partida é o mesmo vértice de chegada. Pelo mesmo motivo, tem-se que o número de deslocamentos verticais para cima é igual ao número de deslocamentos verticais para baixo.

Assim, se o número de deslocamentos horizontais para a direita de um polígono “maisera” é x, então o número de deslocamentos horizontais para a esquerda também é x, ou seja, o número total de deslocamentos horizontais é $2x$. Como o número de deslocamentos horizontais é igual ao número de deslocamentos verticais, tem-se que o número total de deslocamentos é $2x + 2x = 4x$.

Como cada deslocamento tem 1 unidade de comprimento, pode-se concluir que o perímetro de um polígono “maisera” é sempre um múltiplo de 4.

Das alternativas apresentadas, a única que possui um número múltiplo de 4 é a **alternativa *C***.

Segue, abaixo, uma ilustração de um polígono "maisera" com perímetro igual a 2020 unidades de comprimento (1010 lados na horizontal e 1010 lados na vertical).



QUESTÃO 07

Um sistema de transmissão, que funciona perfeitamente, é composto por quatro engrenagens dispostas lado a lado, com 18, 19, 20 e 21 dentes, encaixadas de modo que duas engrenagens giram no sentido horário e duas no sentido anti-horário. Quantos giros completos a engrenagem de 18 dentes precisa fazer para que o sistema volte à posição inicial pela primeira vez?

A) 1330

B) 7980

C) 23940

D) 56820

E) 143640

RESPOSTA DA QUESTÃO 07: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Para determinar a quantidade de giros completos que a engrenagem de 18 dentes precisa fazer para que o sistema volte à posição inicial pela primeira vez, é necessário determinar, inicialmente, o mínimo múltiplo comum de $18, 19, 20$ e 21, que é 23940. Este número corresponde ao menor número de “passos” que cada engrenagem deve realizar para que o sistema volte à posição inicial, considerando que um “passo” é dado quando um determinado dente gira e ocupa a posição do dente subsequente na mesma engrenagem.

Sabendo que a engrenagem de 18 dentes efetua 18 “passos” a cada volta, a quantidade de giros completos que essa engrenagem precisa fazer para que o sistema volte à posição inicial pela primeira vez é

$$\frac{23940}{18} = \mathbf{1330}$$

Vale destacar que, independentemente da disposição destas engrenagens, se o sistema de transmissão funciona perfeitamente, a solução da questão será sempre a mesma.

NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 08

Existe um método bastante simples de gerar triplas pitagóricas (conjuntos de três números naturais que representam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo). O processo é o seguinte:

- Escolha dois números naturais distintos quaisquer, a e b;
- Calcule o dobro do produto de a por b;
- Calcule o valor absoluto da diferença entre os quadrados de a e b;
- Calcule a soma dos quadrados de a e b;
- Pronto! Os três números calculados formam uma tripla pitagórica.

Por exemplo, escolhendo-se os números 1 e 2, gera-se a famosa tripla pitagórica $(3,4,5)$ e, escolhendo-se os números 2 e 5, gera-se a tripla pitagórica $(20,21,29)$.

Qual é o valor absoluto da diferença entre os dois números naturais, a e b, que devem ser escolhidos para se gerarem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 145 e um dos catetos medindo 17?

A) 1

B) 5

C) 8

D) 10

E) 11

RESPOSTA DA QUESTÃO 08: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Sem perda de generalidade, considere $a > b$. A tripla pitagórica é formada pelos números $2ab$, $a^2 - b^2$ e $a^2 + b^2$. Uma vez que esses números representam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, nenhum deles pode ser zero e, portanto, deve-se ter $a \neq 0 \neq b$. Asim, observe que

$$2b^2 > 0$$
$$2b^2 - \boldsymbol{b^2} > 0 - \boldsymbol{b^2}$$
$$b^2 > -b^2$$
$$\boldsymbol{a^2} + b^2 > \boldsymbol{a^2} - b^2$$
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 > a^2 - b^2}$$

Além disso, como $a \neq b$:

$$(a-b)^2 > 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 > 2ab}$$

Como $a^2 + b^2$ é o maior dos três termos da tripla pitagórica, ele sempre representa o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo. Nesta questão, $a^2 + b^2 = 145$.

Deste modo, $a^2 - b^2$ e $2ab$ são sempre as medidas dos catetos do triângulo retângulo. Logo, nesta questão, $a^2 - b^2 = 17$ ou $2ab = 17$.

Como a e b são naturais, $2ab$ é necessariamente par e, portanto, diferente de 17. Logo, $a^2 - b^2 = 17$.

Desta forma,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 145 \\ a^2 - b^2 = 17 \end{cases}$$

Somando as equações, obtém-se:

$$2a^2 = 162$$
$$a^2 = 81$$
$$a' = -9\ (\boldsymbol{F}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a'' = 9}\ (\boldsymbol{V})$$

Substituindo $a = 9$ na primeira equação, tem-se:

$$9^2 + b^2 = 145$$
$$b^2 = 64$$
$$b' = -8 \ (\boldsymbol{F}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{b''} = \mathbf{8} \ (\boldsymbol{V})$$

Portanto, $\boldsymbol{|a - b| = |9 - 8| = 1}$

QUESTÃO 09

Numa palestra realizada no evento da segunda fase da OMIF 2019, um grupo de oito amigos resolveu se sentar na primeira fila do auditório, que tinha exatamente oito lugares vagos consecutivos. Entre estes amigos, estavam Pedro e Marineide. Motivados pelo ambiente em que se encontravam, resolveram calcular a quantidade de maneiras diferentes em que eles podiam se dispor de modo que, entre Pedro e Marineide, houvesse, exatamente, duas pessoas. Sabendo que eles calcularam este resultado corretamente, eles concluíram que esta quantidade é:

A) 720

B) 1440

C) 3600

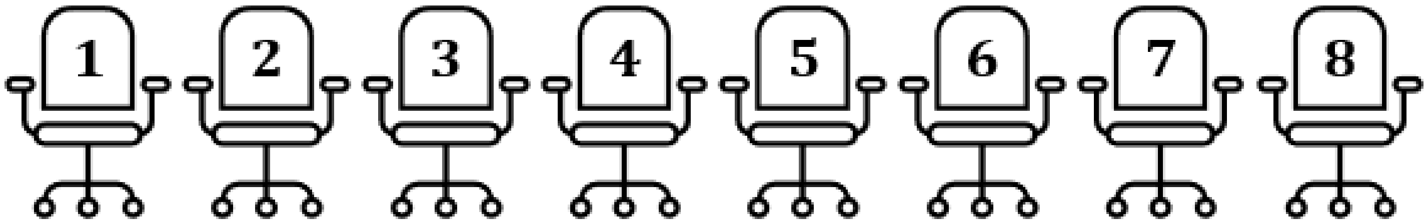
D) 7200

E) 20160

RESPOSTA DA QUESTÃO 09: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Considere que os 8 lugares estejam numerados de 1 a 8, da esquerda para a direita, conforme a figura abaixo.



Existem 5 duplas de posições em que Pedro e Marineide podem se sentar de acordo com as restrições da questão. São elas: $(1,4)$; $(2,5)$; $(3,6)$; $(4,7)$; $(5,8)$. Como eles podem trocar de posição entre si, tem-se $5 \times 2 = 10$ possibilidades distintas.

Escolhidas as posições de Pedro e Marineide, restam 6 lugares onde os outros 6 amigos podem se sentar. Isso pode ser feito de $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneiras distintas (permutações simples).

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras diferentes em que eles podem se dispor é

$$10 \times 720 = \mathbf{7200}.$$

QUESTÃO 10

Sendo a, b e c algarismos do sistema de numeração decimal, tem-se que:

$$180 \times 44400 = (2ab)^3 - (18c)^3$$

Pode-se afirmar que:

A) $a = b = c$

B) $a < b < c$

C) $c < b = a$

D) $b < a < c$

E) $b = c < a$

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Decompondo $180 \times 44\,400$ em fatores primos, obtém-se

$$2^6 \times 3^3 \times 5^3 \times 37.$$

Note que 37, escrito como diferença de cubos, só pode ser representado por $(4^3 - 3^3)$, pois essa diferença, envolvendo números naturais consecutivos, se torna cada vez maior, conforme os exemplos abaixo.

- $(2^3 - 1^3) = 7$
- $(3^3 - 2^3) = 19$
- $(4^3 - 3^3) = 37$
- $(5^3 - 4^3) = 61$

- $(6^3 - 5^3) = 91$
- $(7^3 - 6^3) = 127$

$$\vdots$$

Obviamente, se os números não forem consecutivos, a diferença de seus cubos será ainda maior, conforme novos exemplos abaixo:

- $(3^3 - 1^3) = 26$
- $(4^3 - 2^3) = 56$
- $(4^3 - 1^3) = 63$
- $(5^3 - 3^3) = 98$
- $(5^3 - 2^3) = 117$

- $(5^3 - 1^3) = 124$

$$\vdots$$

Assim, $180 \times 44\,400 \quad = 2^6.3^3.5^3.37$

$$= 2^6.3^3.5^3.(4^3 - 3^3)$$

$$= 2^6.3^3.5^3.4^3 - \ 2^6.3^3.5^3.3^3$$

$$= (2^2.3.5.4)^3 - \ (2^2.3.5.3)^3$$

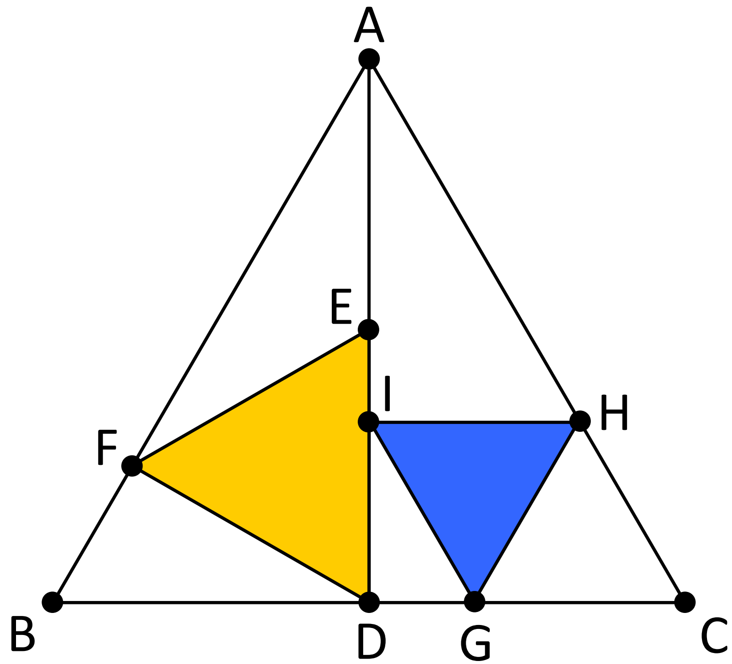
$$= (240)^3 - \ (180)^3 = (2ab)^3 - (18c)^3$$

Desta forma, tem-se $a = 4$ e $b = c = 0$

Logo, $\boldsymbol{b = c \ < a}$

QUESTÃO 11

Na figura abaixo, os triângulos ABC, DEF e GHI são equiláteros. Além disso, $\overline{\mathrm{AD}}$ é uma mediana do triângulo ABC e $\overline{\mathrm{IH}}$ é paralelo a $\overline{\mathrm{BC}}$.



A razão entre as áreas dos triângulos DEF e GHI é:

A) $\frac{13}{8}$

B) $\frac{27}{16}$

C) $\frac{7}{4}$

D) $\frac{11}{6}$

E) 2

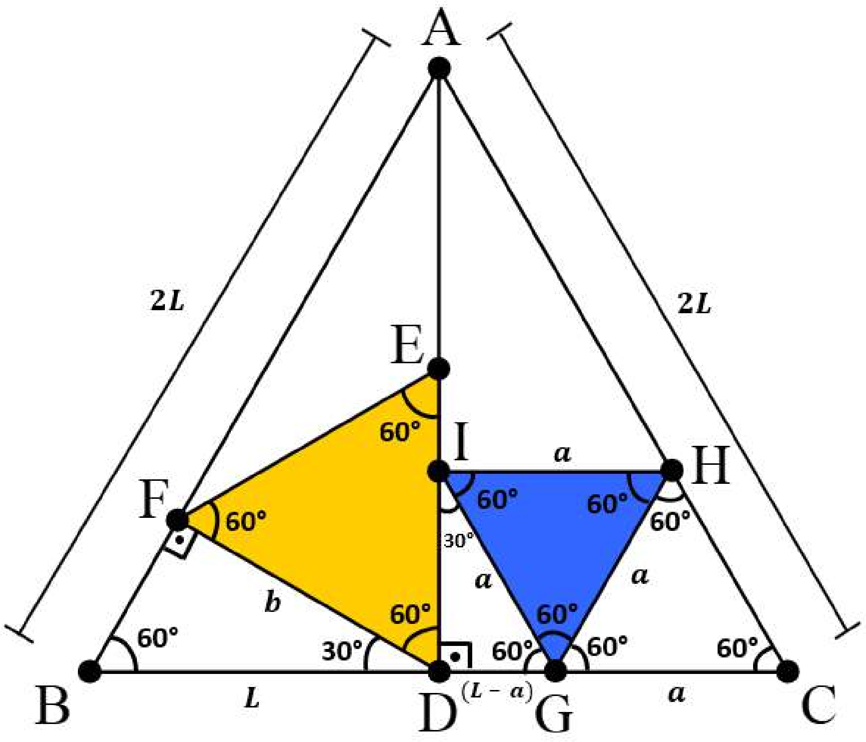
RESPOSTA DA QUESTÃO 11: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Todos os ângulos internos de ABC, DEF e GHI medem 60°, pois esses triângulos são equiláteros. Como $\overline{IH}$ é paralelo a $\overline{CG}$, então $G\hat{H}I$ e $C\hat{G}H$ são alternos internos e, portanto, congruentes, medindo 60°. Como $\overline{AD}$ é mediana do triângulo equilátero ABC, tem-se que $A\hat{D}C$ mede 90°.

Usando o fato de que um ângulo raso mede $180°$, conclui-se que $D\hat{G}I$ mede $60°$ e que $B\hat{D}F$ mede 30°. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, conclui-se que $B\hat{F}D$ mede 90°, que $D\hat{I}G$ mede $30°$ e que $C\hat{H}G$ mede $60°$. Note que o triângulo CGH é equilátero, pois todos os seus ângulos internos medem $60°$.

Considerando que os lados dos triângulos equiláteros ABC, DEF e GHI medem, respectivamente, $2L$, b e a, tem-se $BD = DC = L$, $CG = GH = a$ e $DG = (L - a)$. Todas estas informações podem ser observadas na figura abaixo:



No triângulo retângulo BDF, tem-se:

$$cos\ 30° = \frac{b}{L} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{L} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{L\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

No triângulo retângulo DGI, tem-se:

$$\cos 60\,° = \frac{(L-a)}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(L-a)}{a} \Rightarrow a = 2L - 2a \Rightarrow 3a = 2L$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{L}}{\mathbf{3}}$$

Logo,

$$\frac{A_{DEF}}{A_{GHI}} = \frac{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{2L}{3}\right)^2} = \frac{\frac{3L^2}{4}}{\frac{4L^2}{9}} = \frac{3L^2}{4} \times \frac{9}{4L^2} = \mathbf{\frac{27}{16}}$$

QUESTÃO 12

Sejam M e N dois números naturais, com $M < N$. O máximo divisor comum de M e N é 60 e o mínimo múltiplo comum de M e N é 2079000. Sabendo-se que M é múltiplo de 35, mas não de 25, e que N é divisível por 24, mas não por 9, qual é o valor de $M + N$?

A) 16340

B) 27900

C) 36780

D) 44580

E) 45200

RESPOSTA DA QUESTÃO 12: Alternativa C

RESOLUÇÃO

A questão informa que o máximo divisor comum de M e N é $60 = 2^2.3.5$ e que o mínimo múltiplo comum de M e N é $2079000 = 2^3.3^3.5^3.7.11$, sendo $M < N$.

Como o $M \times N = m.d.c.(M,N) \times m.m.c.(M,N)$, tem-se que:

$$M \times N = 2^5.3^4.5^4.7.11 \qquad \textbf{(1)}$$

Desta forma,

$$M = 2^{\boldsymbol{a}}.3^{\boldsymbol{b}}.5^{\boldsymbol{c}}.7^{\boldsymbol{d}}.11^{\boldsymbol{e}} \quad \text{e}$$
$$N = 2^{\boldsymbol{f}}.3^{\boldsymbol{g}}.5^{\boldsymbol{h}}.7^{\boldsymbol{i}}.11^{\boldsymbol{j}}$$

sendo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{i}$ números naturais não necessariamente diferentes.

De acordo com **(1)**,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{f} &= 5 \\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{g} &= 4 \\ \boldsymbol{c} + \boldsymbol{h} &= 4 \\ \boldsymbol{d} + \boldsymbol{i} &= 1 \\ \boldsymbol{e} + \boldsymbol{j} &= 1 \end{aligned}$$

Como M é múltiplo de $35 = 5^1.7^1$, mas não de $25 = 5^2$, então $\boldsymbol{c} = 1$ e $\boldsymbol{d} = 1$. Consequentemente, $\boldsymbol{h} = 3$ e $\boldsymbol{i} = 0$.

Sendo N divisível por $24 = 2^3.3^1$, mas não por $9 = 3^2$, tem-se $\boldsymbol{g} = 1$ e $\boldsymbol{f} \geq 3$. Daí, segue que $\boldsymbol{b} = 3$. Como o $m.d.c.(M, N)$ contém o fator $2^{\mathbf{2}}$, tem-se que $\boldsymbol{a} = 2$ e $\boldsymbol{f} = 3$.

Finalmente, $\boldsymbol{e} = 0$ e $\boldsymbol{j} = 1$, pois $M < N$.

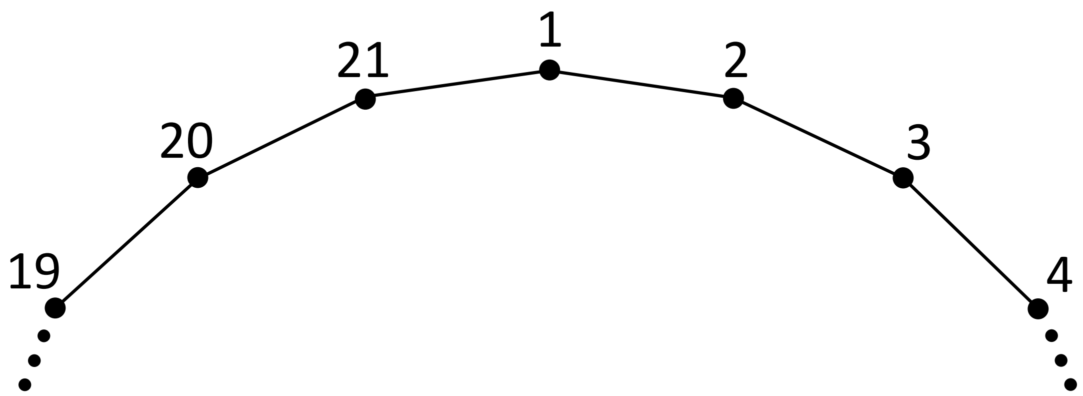
Desta forma,

$$M = 2^2.3^3.5^1.7^1 = 3780 \text{ e}$$
$$N = 2^3.3^1.5^3.11^1 = 33000$$

Logo, $\boldsymbol{M + N = 36780}$

QUESTÃO 13

Uma aranha se desloca sobre as arestas de um hendecoságono regular (polígono de 21 lados) cujos vértices estão numerados de 1 a 21 em ordem crescente e em sentido horário. A figura abaixo ilustra parte do polígono citado.



A aranha caminha sobre o hendecoságono no sentido horário e seu ponto de partida é o vértice de número 1. No primeiro dia, ela percorre 1 aresta do polígono, chegando ao vértice 2.

No segundo dia, ela percorre 3 arestas, parando no vértice 5. No terceiro dia, ela percorre 5 arestas, chegando ao vértice 10.

E assim, sucessivamente, a aranha faz seu trajeto, sempre percorrendo, em cada dia, duas arestas a mais do que percorreu no dia anterior.

Se esta aranha iniciou este processo no dia primeiro de janeiro de 2021, em que vértice ela se encontrará ao final do dia 19 de setembro do mesmo ano?

A) 1

B) 5

C) 10

D) 16

E) 17

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Inicialmente, perceba que do dia primeiro de janeiro de 2021 até 19 de setembro de 2021 existem 31 (janeiro) + 28 (fevereiro) + 31 (março) + 30 (abril) + 31 (maio) + 30 (junho) + 31 (julho) + 31 (agosto) + 19 (setembro) dias, totalizando 262 dias.

Exibindo a relação entre os dias efetivos de deslocamentos da aranha e o número de arestas percorridas ao longo do hendecoságono, pode-se perceber uma sequência lógica em que, no n-ésimo dia, o total de arestas percorridas pela aranha é $(2n - 1)$.

- $1°$ dia → 1 aresta
- $2°$ dia → 3 arestas
- $3°$ dia → 5 arestas
- $4°$ dia → 7 arestas
- $5°$ dia → 9 arestas

.
.
.

- n-ésimo dia → $(2n - 1)$ arestas

.
.
.

- $259°$ dia → 517 arestas
- $260°$ dia → 519 arestas

- $261°$ dia → 521 arestas
- $262°$ dia → 523 arestas

Note que a sequência da quantidade de arestas percorridas pela aranha é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1, o último termo é $2 \times 262 - 1 = 523$ e a razão é 2.

Dessa forma, o total de arestas percorridas pela aranha de primeiro de janeiro de 2021 a 19 de setembro de 2021 é:

$$\frac{(1 + \ 523) \times 262}{2} = 68644$$

Dividindo 68644 por 21 (hendecoságono) encontra-se quociente 3268 e resto 16, o que significa que a aranha dará 3268 voltas ao redor do hendecoságono e percorrerá mais 16 arestas. Como ela inicia o processo no vértice 1, ao final de 19 de setembro de 2021 a aranha estará no **vértice 17**.

QUESTÃO 14

Laynara, que reside na cidade A, precisou se deslocar até uma distante cidade D para visitar sua família. Para isso, ela precisou pegar 3 ônibus distintos: um que foi de A para B, outro que foi de B para C e, por fim, um que foi de C para D.

Quando estava programando sua longa viagem, Laynara havia decidido que partiria de A no dia 10 de setembro. Além disso, para minimizar o cansaço, ela tinha decidido também que todo o percurso da viagem seria feito no menor tempo possível, a partir do primeiro embarque até o último desembarque, incluindo as esperas entre a chegada de um ônibus e a partida do próximo. Ela tinha planejado, também, que estas esperas seriam de, no mínimo, 25 minutos, para evitar correria.

Laynara havia gerado a seguinte tabela, com os horários de partida de cada ônibus e o tempo de duração de cada etapa da viagem:

Trajeto entre as cidades	**Horário de saída dos ônibus: das 6h às 23h59, com a primeira partida às 6h e saídas de:**	**Tempo de duração do trajeto**
A para B	50 em 50 minutos	1 hora e 20 minutos
B para C	80 em 80 minutos	7 horas e 30 minutos
C para D	45 em 45 minutos	4 horas e 10 minutos

Para deixar tudo organizado, Laynara havia comprado as passagens antecipadamente, seguindo o que ela tinha planejado.

Sabendo-se que tudo ocorreu conforme o previsto e que nenhum ônibus se atrasou, em que horário e dia Laynara chegou ao seu destino final?

A) 21h25 de 10 de setembro.

B) 22h10 de 10 de setembro.

C) 02h40 de 11 de setembro.

D) 03h25 de 11 de setembro.

E) 10h10 de 11 de setembro.

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: Alternativa D

RESOLUÇÃO

A tabela abaixo mostra todas as possíveis formas de viagens de acordo com os horários de partida de cada ônibus e o tempo de duração de cada etapa da viagem.

Saída de A	Chegada em B	Espera	Saída de B	Chegada em C	Espera	Saída de C	Chegada em D
06:00	07:20		06:00	13:30	00:30	06:00	10:10
06:50	08:10		07:20	14:50		06:45	10:55
07:40	09:00	00:30	08:40	16:10		07:30	11:40
08:30	09:50		10:00	17:30		08:15	12:25
09:20	10:40		11:20	18:50		09:00	13:10
10:10	11:30		12:40	20:10		09:45	13:55
11:00	12:20		14:00	21:30		10:30	14:40

11:50	13:10	00:30	15:20	22:50		11:15	15:25
12:40	14:00		16:40	00:10		12:00	16:10
13:30	14:50		18:00	01:30		12:45	16:55
14:20	15:40		19:20	02:50		13:30	17:40
15:10	16:30		20:40	04:10		14:15	18:25
16:00	17:20	00:30	22:00	05:30		15:00	19:10
16:50	18:10		23:20	06:50		15:45	19:55
17:40	19:00					16:30	20:40
18:30	19:50				01:05	17:15	21:25
19:20	20:40					18:00	22:10
20:10	21:30					18:45	22:55
21:00	22:20					19:30	23:40
21:50	23:10					20:15	00:25
22:40	00:00					21:00	01:10
23:30	00:50					21:45	01:55
						22:30	02:40
					00:25	23:15	03:25

Como o percurso da viagem foi feito no menor tempo possível e a duração de cada trajeto é constante, é necessário verificar apenas os intervalos de espera entre a chegada de um ônibus e a partida do próximo (mínimo de 25 minutos).

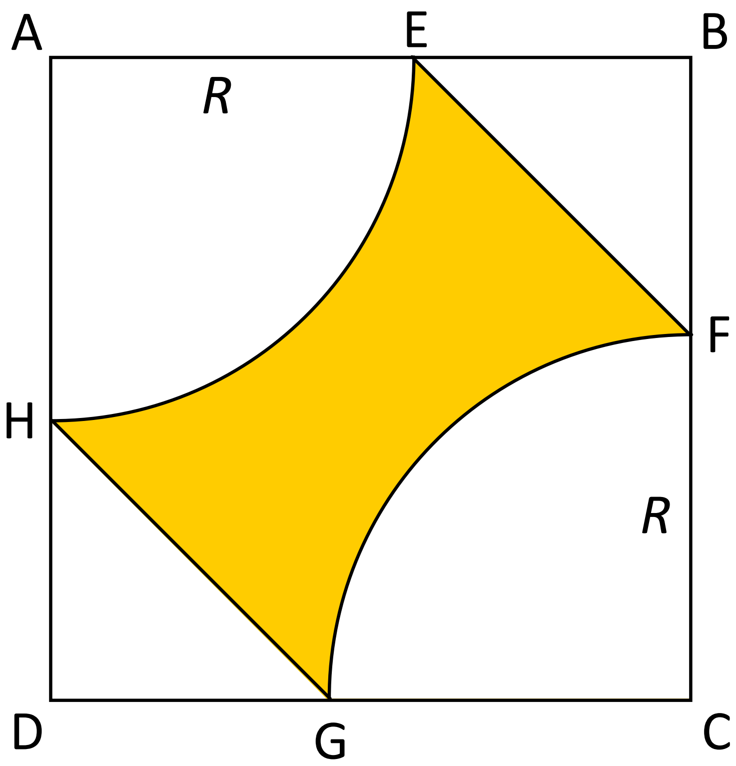
Assim, a melhor escolha de viagem está destacada em verde na tabela, cujo tempo total é 13 horas e 55 minutos. Nessa escolha, Laynara consegue chegar ao seu destino final às **03h25 de 11 de setembro**.

Note que várias células da tabela podem ser suprimidas na busca desses menores intervalos de espera entre a chegada de um ônibus e a partida do próximo, fazendo com que essa análise seja menos trabalhosa.

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 15

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado fixo e $\widehat{\mathrm{EH}}$ e $\widehat{\mathrm{FG}}$ são arcos de circunferência com raios de mesma medida R e centros nos vértices A e C, respectivamente. A medida R varia igualmente nos dois arcos, desde que $\widehat{\mathrm{EH}}$ e $\widehat{\mathrm{FG}}$ não se intersectem. Para que a área destacada seja a maior possível, qual deve ser a razão entre a medida dos raios dos arcos e o comprimento do lado do quadrado?



A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{2}{\pi+2}$

D) $\dfrac{1}{2\pi-2}$

E) $\dfrac{2\pi-3}{6}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Seja L o lado do quadrado fixo. A área destacada é dada por:

$$A = A_{quadrado} - 2 \times A_{setor} - 2 \times A_{triângulo\ retângulo}$$

$$A = L^2 - 2 \times \frac{\pi R^2}{4} - 2 \times \frac{(L-R)^2}{2}$$

$$A = L^2 - \frac{\pi R^2}{2} - (L-R)^2$$

$$A = L^2 - \frac{\pi R^2}{2} - (L^2 - 2LR + R^2)$$

$$A = L^2 - \frac{\pi R^2}{2} - L^2 + 2LR - R^2$$

$$A = \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) R^2 + 2LR$$

$$A = \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)}_{\boldsymbol{a}} R^2 + \underbrace{2L}_{\boldsymbol{b}} R$$

A expressão encontrada se refere à uma função quadrática, cujo gráfico é representado por uma parábola com concavidade para baixo, já que o coeficiente de R^2 é negativo.

Para que a área destacada (A) seja máxima, R deve ser igual a $R_v = \frac{-b}{2a}$.

Assim:

$$R = \frac{-\,2L}{2\left(-\,\frac{\pi}{2} - 1\right)}$$

$$R = \frac{-\,2L}{-\,\pi - 2}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{2L}{\pi + 2}}$$

Logo,

$$\boldsymbol{\frac{R}{L} = \frac{2}{\pi + 2}}$$

QUESTÃO 16

Durante uma de suas aulas, o professor Wagner encontrou, sobre sua mesa, uma caricatura dele. O professor riu da situação, mas queria saber quem tinha feito aquele desenho. Ele sabia que apenas quatro alunos daquela turma tinham habilidades suficientes para fazê-lo: Ana, Beto, Carlos e Daniela. O professor, então, fez a seguinte pergunta aos quatro estudantes: quem de vocês fez esta minha caricatura? Eles fizeram as seguintes afirmações:

- Ana: Não fui eu.
- Beto: Foi a Daniela.
- Carlos: Foi o Beto.
- Daniela: O Carlos está mentindo.

Sabendo-se que realmente foi um desses quatro alunos que fez a caricatura e que exatamente dois alunos mentiram para o professor em suas afirmações, pode-se concluir que:

A) Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.

B) Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.

C) Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.

D) Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.

E) Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.

RESPOSTA DA QUESTÃO 16: Alternativa E

RESOLUÇÃO

SOLUÇÃO 01:

Sabe-se que a caricatura foi feita ou por Ana, ou por Beto, ou por Carlos, ou por Daniela. A ideia é realizar a análise dessas 4 possibilidades no intuito de identificar contradições ou confirmações acerca da veracidade das declarações realizadas pelos estudantes. Utilizando a letra **V** para identificar a pessoa que disse verdade e a letra **M** para identificar a pessoa que mentiu, tem-se:

- **1ª possibilidade: Considerando que Ana fez a caricatura do professor**

  - Ana: Não fui eu. (**M**)
  - Beto: Foi a Daniela. (**M**)
  - Carlos: Foi o Beto. (**M**)
  - Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**)

Essa possibilidade deve ser descartada pois, nesse caso, apenas Daniela estaria dizendo verdade e os demais estariam mentindo, contrariando a informação da questão de que exatamente duas pessoas mentiram.

- **2ª possibilidade: Considerando que <u>Beto</u> fez a caricatura do professor**

  - Ana: Não fui eu. (**V**)
  - Beto: Foi a Daniela. (**M**)
  - Carlos: Foi o Beto. (**V**)
  - Daniela: O Carlos está mentindo. (**M**)

Essa possibilidade não deve ser descartada pois não apresenta contradições no que diz respeito à quantidade de pessoas que mentiram (exatamente duas). Porém, não se pode garantir que é a única situação possível antes da análise de todas as outras possibilidades.

- **3ª possibilidade: Considerando que Carlos fez a caricatura do professor**

  - Ana: Não fui eu. (**V**)
  - Beto: Foi a Daniela. (**M**)
  - Carlos: Foi o Beto. (**M**)
  - Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**)

Essa possibilidade também não deve ser descartada pois não apresenta contradições no que diz respeito à quantidade de pessoas que mentiram (exatamente duas). Dessa forma, tem-se, a princípio, duas possibilidades a serem reanalisadas.

- **4ª possibilidade: Considerando que <u>Daniela</u> fez a caricatura do professor**

  - Ana: Não fui eu. (**V**)
  - Beto: Foi a Daniela. (**V**)
  - Carlos: Foi o Beto. (**M**)
  - Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**)

Essa possibilidade deve ser descartada pois, nesse caso, apenas Beto estaria mentindo e os demais estariam dizendo verdade, contrariando a informação da questão de que exatamente duas pessoas mentiram.

Note que a 2ª e a 3ª possibilidades são duas (únicas) situações admissíveis. Por isso, não se pode concluir efetivamente quem realmente fez a caricatura do professor, mas pode-se concluir que Ana disse verdade (o que se confirma pelas 2ª e 3ª possibilidades), que Beto mentiu (o que se confirma pelas 2ª e 3ª possibilidades), que Ana e Daniela não fizeram a caricatura, e por fim, que ou Beto ou Carlos fizeram a Caricatura.

De acordo com as alternativas propostas, tem-se que **Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.**

SOLUÇÃO 02:

Uma segunda solução consiste em analisar todas as 6 possibilidades em que exatamente 2 dos 4 estudantes estão mentindo $\left(C_{4,2} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6\right)$. A ideia é identificar contradições acerca da quantidade de pessoas que de fato fizeram a caricatura e/ou da veracidade das declarações realizadas por elas.

Realizando as análises de forma individualizada em cada possibilidade, utilizando a letra **V** para a pessoa que disse verdade e a letra **M** para a pessoa que mentiu, o símbolo ✓ para quem fez a caricatura e o símbolo ✗ para quem não fez a caricatura, tem-se:

- **1ª possibilidade: Considerando que Ana e Beto mentiram e que Carlos e Daniela disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (**M**) ⇒ Ana fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (**M**) ⇒ Não foi Daniela quem fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (**V**) ⇒ Beto fez a caricatura. Contradição, pois Ana já fez a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**) ⇒ Contradição, pois Carlos disse verdade.

	1ª Possibilidade	
Ana	M	✓
Beto	M	✓
Carlos	V	
Daniela	V	✗

Devido às contradições encontradas, a 1ª possibilidade deve ser descartada.

- **2ª possibilidade: Considerando que Ana e Carlos mentiram e que Beto e Daniela disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (**M**) ⇒ Ana fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (**V**) ⇒ Daniela fez a caricatura. Contradição, pois Ana já fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (**M**) ⇒ Beto não fez a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**) ⇒ Declaração confirmada.

	2ª Possibilidade	
Ana	M	✓
Beto	V	✗
Carlos	M	
Daniela	V	✓

Devido à contradição encontrada, a 2ª possibilidade também deve ser descartada.

- **3ª possibilidade: Considerando que Ana e Daniela mentiram e que Beto e Carlos disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (**M**) ⇒ Ana fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (**V**) ⇒ Daniela fez a caricatura. Contradição, pois Ana já fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (**V**) ⇒ Beto fez a caricatura. Contradição, pois já fizeram a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (**M**) ⇒ Declaração confirmada.

	3ª Possibilidade	
Ana	M	✓
Beto	V	✓
Carlos	V	
Daniela	M	✓

Devido às contradições encontradas, a 3ª possibilidade também deve ser descartada.

- **4ª possibilidade: Considerando que Beto e Carlos mentiram e que Ana e Daniela disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (**V**) ⇒ Ana não fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (**M**) ⇒ Daniela não fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (**M**) ⇒ Beto não fez a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (**V**) ⇒ Declaração confirmada.

	4ª Possibilidade	
Ana	V	✘
Beto	M	✘
Carlos	M	
Daniela	V	✘

Essa possibilidade não deve ser descartada, pois não apresenta contradições no que diz respeito a quantidade de pessoas que fizeram a caricatura (sabe-se que Ana, Beto e Daniela não fizeram) e também não apresenta contradições em relação à veracidade das declarações realizadas pelos estudantes. Porém, não se pode garantir que é a única situação possível antes da análise de todas as outras possibilidades.

- **5ª possibilidade: Considerando que Beto e Daniela mentiram e que Ana e Carlos disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (V) ⇒ Ana não fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (M) ⇒ Daniela não fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (V) ⇒ Beto fez a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (M) ⇒ Declaração confirmada.

	5ª Possibilidade	
Ana	V	✘
Beto	M	✓
Carlos	V	
Daniela	M	✘

Essa possibilidade não deve ser descartada, pois não apresenta contradições no que diz respeito a quantidade de pessoas que fizeram a caricatura (sabe-se que Ana e Daniela não fizeram) e também não apresenta contradições em relação à veracidade das declarações realizadas pelos estudantes. Dessa forma, tem-se, a princípio, duas possibilidades a serem reanalisadas.

- **6ª possibilidade: Considerando que Carlos e Daniela mentiram e que Ana e Beto disseram verdade.**

- Ana: Não fui eu. (**V**) ⇒ Ana não fez a caricatura.
- Beto: Foi a Daniela. (**V**) ⇒ Daniela fez a caricatura.
- Carlos: Foi o Beto. (**M**) ⇒ Beto não fez a caricatura.
- Daniela: O Carlos está mentindo. (**M**) ⇒ As declarações de Carlos e Daniela são contraditórias, pois os dois estão mentindo.

	6ª Possibilidade	
Ana	V	✘
Beto	V	✘
Carlos	M	
Daniela	M	✓

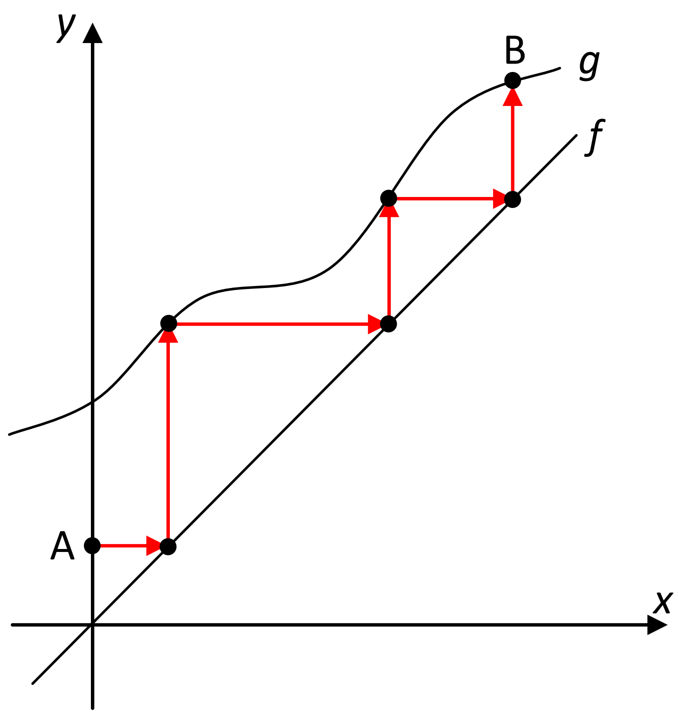
Devido à contradição encontrada, a 6ª possibilidade deve ser descartada.

Note que a 4ª e a 5ª possibilidades são as duas únicas situações admissíveis. Assim, não se pode concluir efetivamente quem realmente fez a caricatura do professor, mas pode-se concluir que Ana disse verdade (o que se confirma pelas 4ª e 5ª possibilidades), que Beto mentiu (o que se confirma pelas 4ª e 5ª possibilidades) e que Ana e Daniela não fizeram a caricatura.

De acordo com as alternativas propostas, tem-se que **Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.**

QUESTÃO 17

No plano cartesiano abaixo, está representado o trajeto que uma formiga faz para ir de A até B. Note que ela caminha sempre na direção horizontal para direita ou vertical para cima. Além disso, observe que o trajeto está totalmente compreendido entre os gráficos das funções reais f e g.



Se $A = (0, k)$ e $f(x) = x$, a distância total percorrida pela formiga é:

A) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + g(k) - k$

B) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + g(k) + k$

C) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) - g\big(g(k)\big) + g(k) - k$

D) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) - k$

E) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + k$

RESPOSTA DA QUESTÃO 17: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que $f(x) = x$ representa uma função identidade. Assim, a abscissa e a ordenada de cada ponto do gráfico de f são iguais.

Agora, observe que:

- O $1°$ ponto em que a formiga toca a função f tem ordenada k. Logo, sua abscissa também é k.
- O $1°$ ponto em que a formiga toca a função g tem abscissa k. Logo, sua ordenada é $g(k)$.

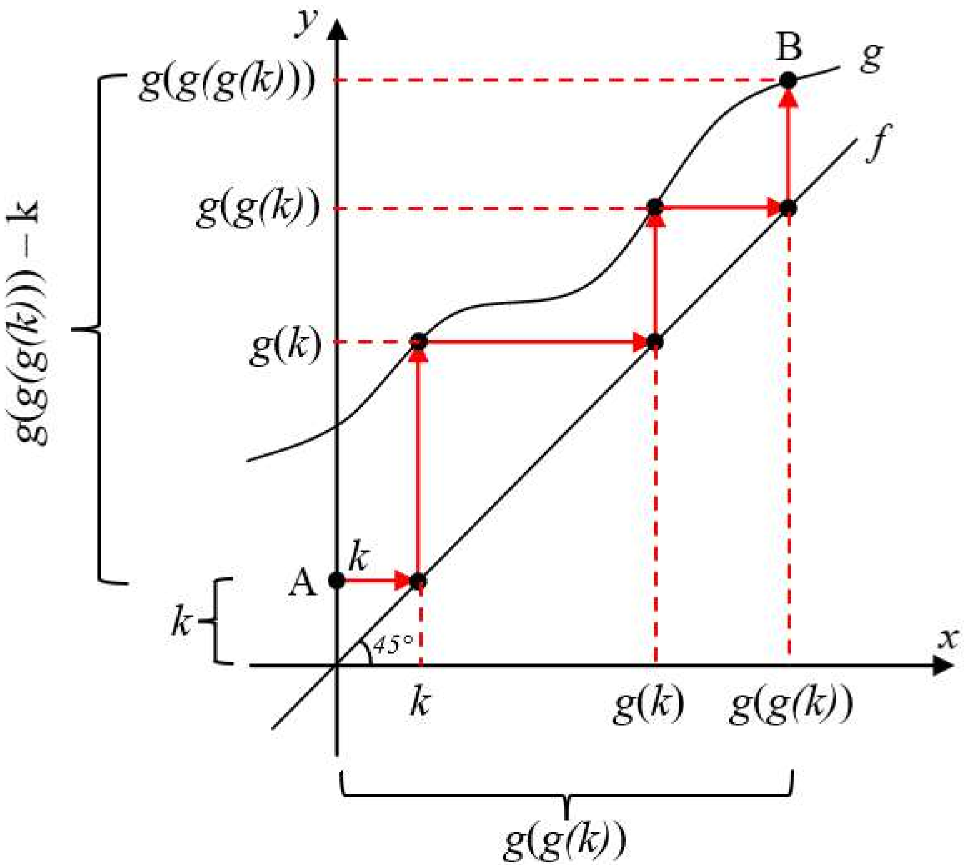
- O $2°$ ponto em que a formiga toca a função f tem ordenada $g(k)$. Logo, sua abscissa também é $g(k)$.

- O $2°$ ponto em que a formiga toca a função g tem abscissa $g(k)$. Logo, sua ordenada é $g\big(g(k)\big)$.

- O $3°$ ponto em que a formiga toca a função f tem ordenada $g\big(g(k)\big)$. Logo, sua abscissa também é $g\big(g(k)\big)$.

- O $3°$ ponto em que a formiga toca a função g tem abscissa $g\big(g(k)\big)$. Logo, sua ordenada é $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big)$.

As coordenadas dos pontos em que a formiga toca os gráficos de f e g estão ilustrados a seguir.



Projetando ortogonalmente os trajetos horizontais sobre o eixo x, verifica-se que a distância total percorrida pela formiga na horizontal é $g\big(g(k)\big)$.

Projetando ortogonalmente os trajetos verticais sobre o eixo y, verifica-se que a distância total percorrida pela formiga na vertical é $g\left(g(g(k))\right) - k$.

Dessa forma, a distância total percorrida pela formiga é:

$$g\big(g(k)\big) + g(g(g(k))) - k = \boldsymbol{g(g(g(k))) + g(g(k)) - k}$$

QUESTÃO 18

Uma caixa contém 30 bolas idênticas que foram numeradas de 1 a 30. Se duas bolas forem sorteadas simultaneamente dessa caixa, qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja um múltiplo de 4?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{7}{29}$

C) $\frac{11}{30}$

D) $\frac{15}{58}$

E) $\frac{98}{435}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 18: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Pode-se definir o espaço amostral equiprovável associado a este experimento aleatório (sortear duas bolas simultaneamente) como um conjunto composto por

$$n(\Omega) = C_{30,2} = \frac{30!}{2! \times 28!} = 15 \times 29 = 435 \text{ elementos.}$$

Desses elementos, deve-se contar aqueles em que a soma dos dois números é um múltiplo de 4 (evento k). Para isso, é possível dividir o conjunto dos números naturais de 1 a 30 em 4 subconjuntos disjuntos:

$$A = \{x = 4k, com\ 1 \le k \le 7, k \in \mathbb{N}\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$$
$$\Rightarrow n(A) = 7$$

$$B = \{x = 4k + 1, com\ 0 \le k \le 7, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29\}$$
$$\Rightarrow n(B) = 8$$

$$C = \{x = 4k + 2, com\ 0 \le k \le 7, k \in \mathbb{N}\} = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\}$$
$$\Rightarrow n(C) = 8$$

$$D = \{x = 4k + 3, com\ 0 \le k \le 6, k \in \mathbb{N}\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$$
$$\Rightarrow n(D) = 7$$

Para que a soma dos dois números escolhidos seja múltiplo de 4, deve-se:

- Sortear dois elementos de A: Isso pode ser feito de $C_{7,2} = \frac{7!}{2!\times 5!} = 21$ maneiras distintas.

- Sortear dois elementos de C: Isso pode ser feito de $C_{8,2} = \frac{8!}{2!\times 6!} = 28$ maneiras distintas.

- Sortear um elemento de B e um de D: Isso pode ser feito de $8 \times 7 = 56$ maneiras distintas.

Assim, $n(k) = 21 + 28 + 56 = 105$ e a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja um múltiplo de 4 é:

$$p = \frac{n(k)}{n(\Omega)} = \frac{105}{435} = \mathbf{\frac{7}{29}}$$

QUESTÃO 19

A partir dos pontos médios dos lados de um quadrado, é possível construir um segundo quadrado. A partir dos pontos médios desse novo quadrado, é possível construir um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. A Figura 1, mostrada a seguir, ilustra a construção dos três primeiros quadrados.

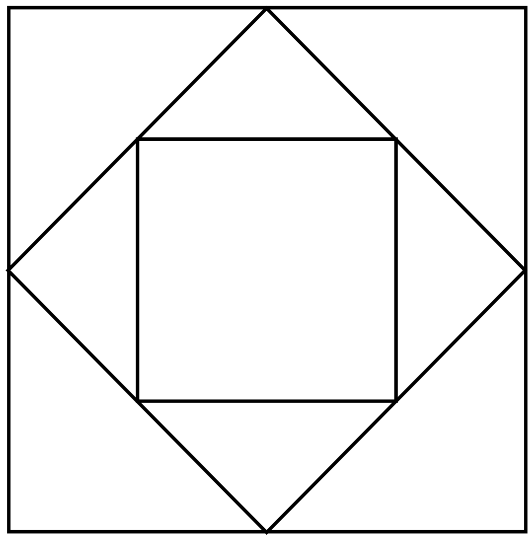


Figura 1

De maneira análoga, a partir dos pontos médios dos lados de um hexágono regular, é possível construir um segundo hexágono regular. A partir dos pontos médios dos lados desse novo hexágono, é possível construir um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. A Figura 2, mostrada a seguir, ilustra a construção dos três primeiros hexágonos regulares.

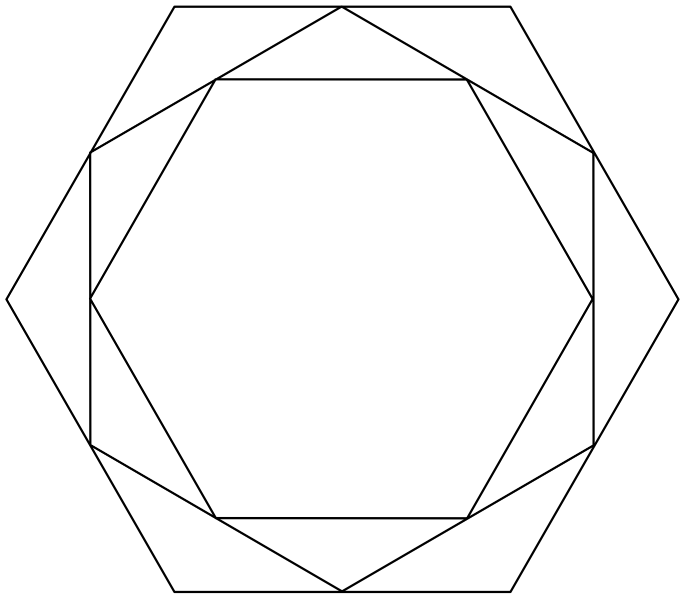


Figura 2

Considerando que estas construções foram feitas a partir de um quadrado e de um hexágono regular com lados iguais, a razão entre a soma dos perímetros dos infinitos quadrados construídos e a soma dos perímetros dos infinitos hexágonos construídos é:

A) $\frac{4-2\sqrt{3}}{6-3\sqrt{2}}$

B) $\frac{6-3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}$

C) $\frac{4-2\sqrt{2}}{6+3\sqrt{3}}$

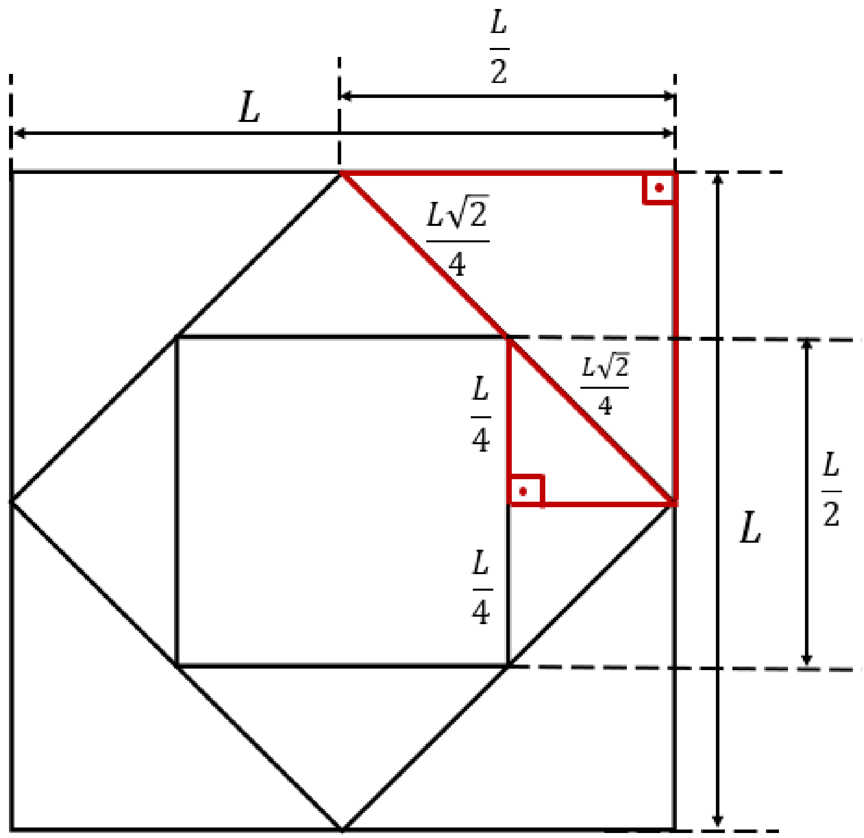
D) $\frac{4\sqrt{2}-2}{6\sqrt{3}-3}$

E) $\frac{4\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}+2}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 19: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Seja L o lado do primeiro quadrado. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos destacados na figura abaixo, encontra-se $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ para a medida do lado do segundo quadrado e $\frac{L}{2}$ para a medida do lado do terceiro quadrado. Dessa forma, os perímetros dos 3 primeiros quadrados são, respectivamente, $4L$, $2L\sqrt{2}$ e $2L$. Perceba que os perímetros de todos os quadrados construídos a partir do primeiro formam uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{2L\sqrt{2}}{4L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



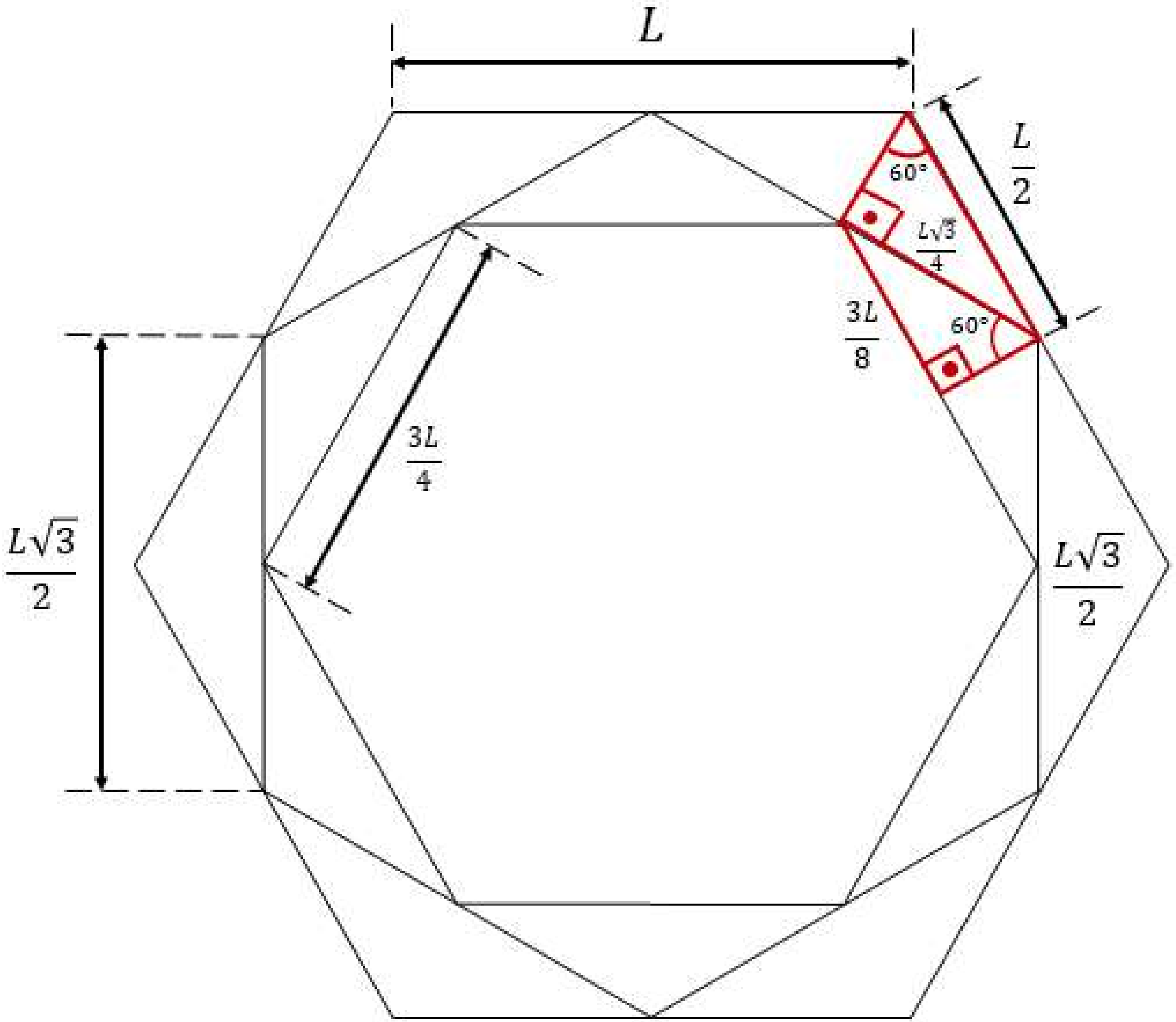
Sendo assim, a soma de todos esses perímetros é $S_Q = \frac{a_1}{1-q}$, em que a_1 é o primeiro termo e q a razão dessa progressão, ou seja,

$$S_Q = \frac{4L}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4L}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \boldsymbol{\frac{8L}{2-\sqrt{2}}}$$

Analogamente, seja L o lado do primeiro hexágono. O ângulo interno do primeiro hexágono regular mede $\frac{(6-2)\times 180°}{6} = 120°$ e sua bissetriz forma um ângulo de 90° com um lado do segundo hexágono regular, pois ela é também altura de um triângulo isósceles de lado $\frac{L}{2}$.

De forma análoga, isso ocorre também entre os demais hexágonos. Aplicando relações trigonométricas nos triângulos retângulos destacados na figura a seguir (seno de $60°$), encontra-se $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ para a medida do lado do segundo hexágono regular e $\frac{3L}{4}$ para a medida do lado do terceiro hexágono regular.

Dessa forma, os perímetros dos 3 primeiros hexágonos regulares são respectivamente $6L$, $3L\sqrt{3}$ e $\frac{9L}{2}$. Perceba que os perímetros de todos os hexágonos regulares construídos a partir do primeiro formam uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{3L\sqrt{3}}{6L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Sendo assim, a soma de todos esses perímetros é

$$S_H = \frac{6L}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6L}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\mathbf{12}\boldsymbol{L}}{\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}}$$

Desta forma,

$$\frac{S_Q}{S_H} = \frac{\frac{8L}{2-\sqrt{2}}}{\frac{12L}{2-\sqrt{3}}} = \frac{8L}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{12L} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{3(2-\sqrt{2})} = \frac{\mathbf{4 - 2\sqrt{3}}}{\mathbf{6 - 3\sqrt{2}}}$$

QUESTÃO 20

Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma função definida por:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \cdot f(n-1), \text{se } n > 1 \end{cases}$$

O valor de $f(2021)$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1011}{2021}$

C) $\frac{2021}{2022}$

D) $\dfrac{2021}{2021^2-1}$

E) $1 - \dfrac{1}{2021^2}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 20: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Pode-se escrever $f(n)$ como o produto da soma pela diferença de dois termos, multiplicado por $f(n-1)$, ou seja,

$$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot f(n-1)$$

Dessa forma, calculando os valores de $f(2), f(3), f(4), f(5), \ldots,$ $f(2021)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(2) &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot f(1) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$f(3) = \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot f(2)$$
$$= \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(4) = \left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot f(3)$$
$$= \left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(5) = \left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot f(4)$$
$$= \left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$\vdots$$

$$f(2021) = \left(1+\frac{1}{2021}\right).\left(1-\frac{1}{2021}\right).\left(1+\frac{1}{2020}\right).\left(1-\frac{1}{2020}\right).\,....$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\right).\left(1-\frac{1}{4}\right).\left(1+\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(2021) = \left(1+\frac{1}{2021}\right)\left(1+\frac{1}{2020}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{2021}\right)\left(1-\frac{1}{2020}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(2021) = \left(\frac{2022}{2021}\right)\cdot\left(\frac{2021}{2020}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2020}{2021}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(2021) = \left(\frac{2022}{\cancel{2021}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2021}}{\cancel{2020}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2020}}{2021}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$f(2021) = \left(\frac{2022}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2021}\right)$$

$$\boldsymbol{f(2021) = \frac{1011}{2021}}$$

QUESTÃO 21

Isabela deseja contar quantas sequências podem ser formadas, usando-se exatamente quatro das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com as características abaixo:

- As quatro letras devem aparecer em ordem alfabética, da esquerda para a direita;
- As letras devem ser distintas e não podem ser consecutivas.

Ela começou a listar algumas das sequências: “aceg”, “amor”, “bjmw”, “jouz”, “nprv”. Isabela percebeu que existiam muitas e resolveu, então, realizar essa contagem utilizando seus conhecimentos de análise combinatória.

Desta forma, ela pôde concluir corretamente que o total de sequências com as características expostas é:

A) 7315

B) 8855

C) 14950

D) 274560

E) 358800

RESPOSTA DA QUESTÃO 21: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Inicialmente, pode-se definir uma relação (bijeção) entre as sequências que contém exatamente 4 das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa e as sequências de "tamanho" 26 que utilizam exatamente 4 letras $\boldsymbol{S}$ e 22 letras $\boldsymbol{N}$, conforme abaixo:

- Se a n-ésima letra do alfabeto está presente na sequência de 4 letras, escreve-se a letra $\boldsymbol{S}$ na n-ésima posição da sequência de "tamanho" 26.

- Se a n-ésima letra do alfabeto **NÃO** está presente na sequência de 4 letras, escreve-se a letra $\boldsymbol{N}$ na n-ésima posição da sequência de "tamanho" 26.

Essa bijeção facilitará a contagem das sequências com as características expostas na questão. Observe alguns exemplos:

Sequências Válidas:

- $aceg \to SNSNSNSNNNNNNNNNNNNNNNNNNN$
- $amor \to SNNNNNNNNNNNSNSNNSNNNNNNNN$
- $bjmw \to NSNNNNNNNSNNSNNNNNNNNNSNNN$
- $jouz \to NNNNNNNNNSNNNNSNNNNNSNNNNS$
- $nprv \to NNNNNNNNNNNNNSNSNSNNNSNNNN$

Sequências Não Válidas:

- $amnz \rightarrow \boldsymbol{SNNNNNNNNNNNSSNNNNNNNNNNNS}$
- $pqtw \rightarrow \boldsymbol{NNNNNNNNNNNNNNNSSNNSNNSNNN}$
- $ghyz \rightarrow \boldsymbol{NNNNNNSSNNNNNNNNNNNNNNNNSS}$
- $bcdm \rightarrow \boldsymbol{NSSSNNNNNNNNSNNNNNNNNNNNNN}$
- $abcd \rightarrow \boldsymbol{SSSSNNNNNNNNNNNNNNNNNNNNNN}$

Note que as sequências de “tamanho” 26 que apresentam duas ou mais letras $\boldsymbol{S}$ juntas não satisfazem as condições estabelecidas pela questão, pois se associam às sequências de 4 letras distintas com duas ou mais letras consecutivas.

Desta forma, para encontrar a quantidade de sequências que podem ser formadas usando-se exatamente 4 das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa com as características definidas pela questão, basta contar de quantas maneiras os 23 espaços vazios gerados pelas 22 letras $\boldsymbol{N}$ podem ser preenchidos com as 4 letras $\boldsymbol{S}$.

$$\_\boldsymbol{N}\_$$

Isso pode ser feito de

$$C_{23,4} = \frac{23!}{4! \times 19!} = \frac{23 \times 22 \times 21 \times 20 \times \cancel{19!}}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \cancel{19!}} = \mathbf{8855}$$

formas distintas.