OLIMPÍADA DE
MATEMÁTICA DAS
INSTITUIÇÕES FEDERAIS

OMIF 2021

Prova de Primeira Fase

Dados do estudante:

Nome Completo:
E-mail:
CPF:
Telefone de contato:

Data de Nascimento:
Instituição e Campus:
Curso Técnico:
Série:
Nome de um Responsável Legal:

Questionário Socioeconômico:

1. Gênero:

a) Feminino
b) Masculino
c) Outro
d) Prefiro não dizer

2. Você se considera:

a) Branco
b) Pardo
c) Preto
d) Amarelo
e) Indígena
f) Prefiro não dizer

3. Onde você realizou seus estudos de Ensino Fundamental ou equivalente?

a) Escola pública municipal
b) Escola pública estadual
c) Escola particular
d) Parte em escola pública e parte em escola particular
e) Supletivo
f) Prefiro não dizer
g) Outro:

4. Em qual faixa de renda per capita sua família se encontra?
(Renda per capita é o resultado da renda familiar total dividido pelo número de membros da família)

a) R$ 0,00 a 550,00
b) R$ 550,01 a R$ 1.100,00
c) R$ 1.100,01 a R$ 1.650,00
d) R$ 1.650,01 a R$ 2.200,00
e) R$ 2.200,01 a R$ 2.750,00
f) R$ 2.750,01 a R$ 3.300,00
g) Acima de R$ 3.300,00
h) Prefiro não dizer

5. Assinale se apresenta alguma(s) das deficiências listadas abaixo: (Pode assinalar mais de uma condição. Caso não tenha deficiência, marque "Não apresento deficiência")

a) Não apresento deficiência
b) Baixa Visão
c) Cegueira
d) Deficiência Auditiva (baixa audição)
e) Deficiência Física
f) Deficiência Intelectual

g) Deficiência Múltipla
h) Surdez
i) Surdocegueira
j) Transtorno do Espectro Autista
k) Visão Monocular
l) Outra:

____

6. Assinale se apresenta alguma(s) das necessidades específicas listadas abaixo: (Pode assinalar mais de uma condição. Caso não tenha necessidade específica, marque "Não apresento necessidades específicas")

a) Não apresento necessidades específicas
b) Altas Habilidades/Superdotação
c) Discalculia
d) Disgrafia
e) Dislalia
f) Dislexia
g) Disortografia
h) Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH)
i) Outra:

____

Observação: A equipe organizadora da OMIF GARANTE a privacidade dos dados pessoais preenchidos. Estas informações poderão ser fruto de posterior pesquisa qualitativa e/ou quantitativa pelos organizadores da OMIF.

Termos de Compromisso:

- Estou ciente que esta prova deve ser resolvida em algum horário entre 14h e 20h (horário de Brasília) do dia 19/09/2021 e que **apenas estudantes com deficiência ou Transtorno do Espectro Autista, cujos laudos médicos foram previamente enviados à Organização da OMIF, terão direito a uma hora adicional no tempo de prova (encerrará às 21h, horário de Brasília).**

- Estou ciente que é terminantemente proibida, durante a realização da prova, qualquer comunicação com outras pessoas. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.

- Estou ciente que é terminantemente proibida a publicação das questões dessa prova no dia 19/09/2021 em qualquer mídia digital. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.

- Estou ciente que, durante a realização da prova, é permitido o uso de livros e da internet para acesso a sites de pesquisa, mas é terminantemente proibido o uso da internet para acessar sites de fórum de discussão, sites de comunicação e afins. Caso isso seja constatado, minha prova será anulada.

Declaro que li e estou de acordo com os termos:

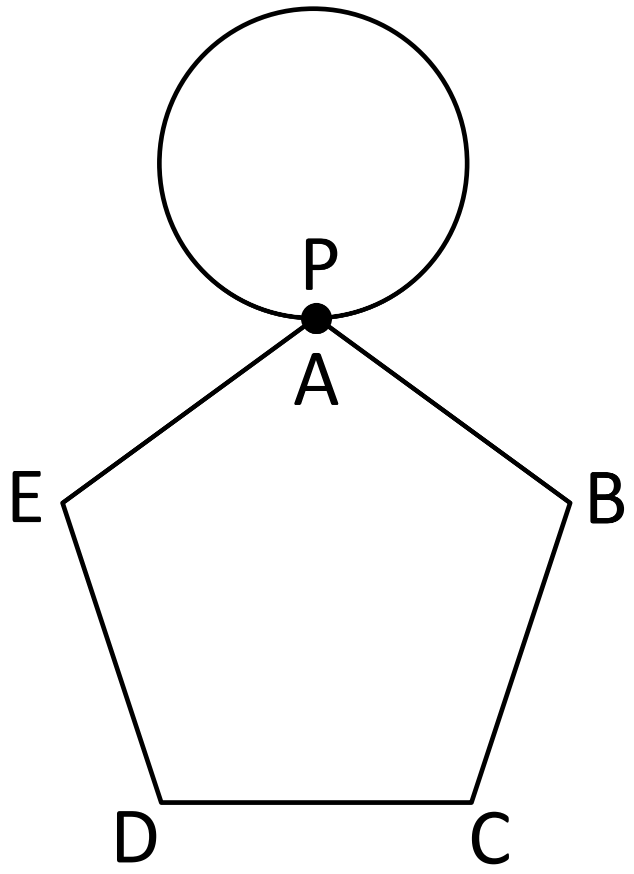
____

Assinatura do estudante

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

O ponto P de uma circunferência cujo raio mede 3 cm coincide com o vértice A de um pentágono regular ABCDE cujo lado mede 2π cm, como mostra a figura abaixo (A e P são os únicos pontos em comum neste instante).



A partir deste momento, a circunferência começa a girar sobre o pentágono, sem deslizar, no sentido horário. Consideramos que a circunferência completou uma volta quando o ponto P toca o pentágono novamente.

Quando a circunferência completar 2021 voltas, o ponto P estará coincidindo com o vértice:

A) A

B) B

C) C

D) D

E) E

QUESTÃO 02

Em um evento realizado pela OMIF, estavam presentes, ao todo, 180 paulistas, 150 mineiros e 122 cariocas. Num determinado momento, um grupo de paulistas teve que se retirar.

Após a saída desse grupo, os paulistas restantes passaram a representar 36% dos integrantes remanescentes do evento.

Em relação aos 180 paulistas que estavam presentes no evento inicialmente, o grupo que se retirou representava um percentual entre:

A) 10% e 13%

B) 13% e 16%

C) 16% e 19%

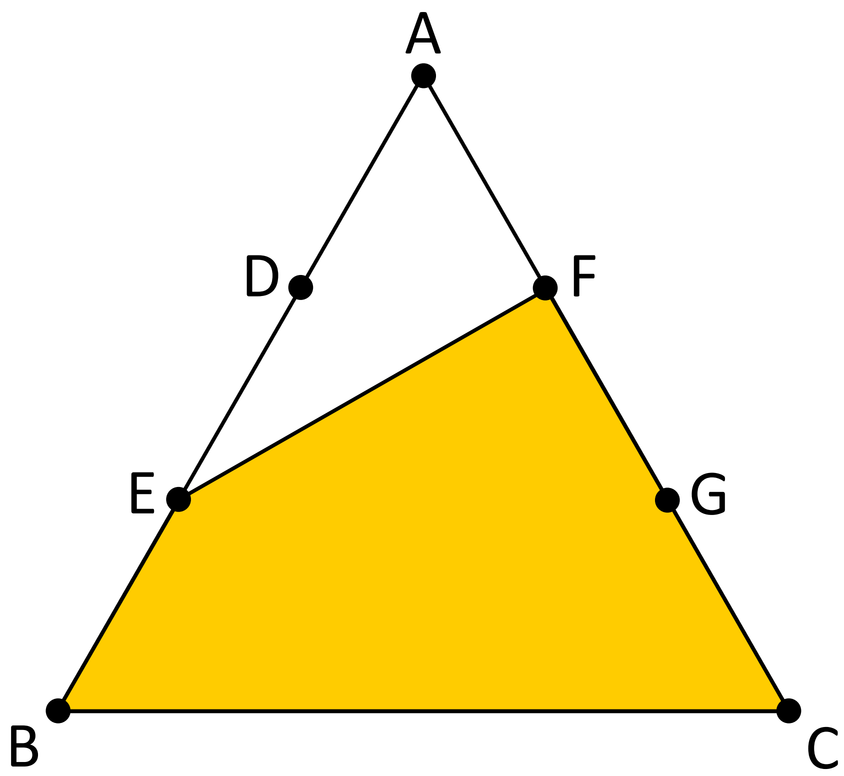
D) 19% e 22%

E) 22% e 25%

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 02)

QUESTÃO 03

O triângulo equilátero ABC tem área igual a $234\ \text{cm}^2$. Os pontos D e E dividem o lado $\overline{AB}$ em 3 partes iguais e os pontos F e G dividem o lado $\overline{AC}$ em 3 partes iguais.



A área do quadrilátero BEFC, em cm^2, é:

A) 156

B) 169

C) 182

D) 190

E) 195

QUESTÃO 04

Tatiane pensa em um número e pergunta ao seu amigo, João, se ele consegue descobrir que número é esse. Para isso, ela fornece duas informações para ele:

(1) O número é inteiro positivo e o produto dele pelo seu antecessor é igual a 4830.

(2) Se acrescentarmos 30 unidades ao número pensado e, depois, calcularmos 70% do valor obtido, o resultado será o próprio número pensado.

Sobre a suficiência destas informações para que João possa descobrir qual é o número que Tatiane pensou, podemos concluir que:

A) A informação 1, sozinha, é suficiente para responder à pergunta, mas a informação 2, sozinha, não é suficiente.

B) A informação 2, sozinha, é suficiente para responder à pergunta, mas a informação 1, sozinha, não é suficiente.

C) As duas informações, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas sozinha é suficiente.

D) Tanto a informação 1 quanto a informação 2 são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

E) A pergunta não pode ser respondida só com as duas informações fornecidas.

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 04)

QUESTÃO 05

Um baralho composto por 40 cartas idênticas, exceto pela cor e numeração, tem, exatamente,

- x cartas azuis, numeradas de 1 a x;
- x^2 cartas brancas, numeradas de 1 a x^2;
- $x + 5$ cartas pretas, numeradas de 1 a $x + 5$.

Retirando-se, aleatoriamente, uma carta deste baralho, qual é a probabilidade de ela ser branca ou ser numerada com um múltiplo de 5?

A) $\frac{7}{10}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{8}$

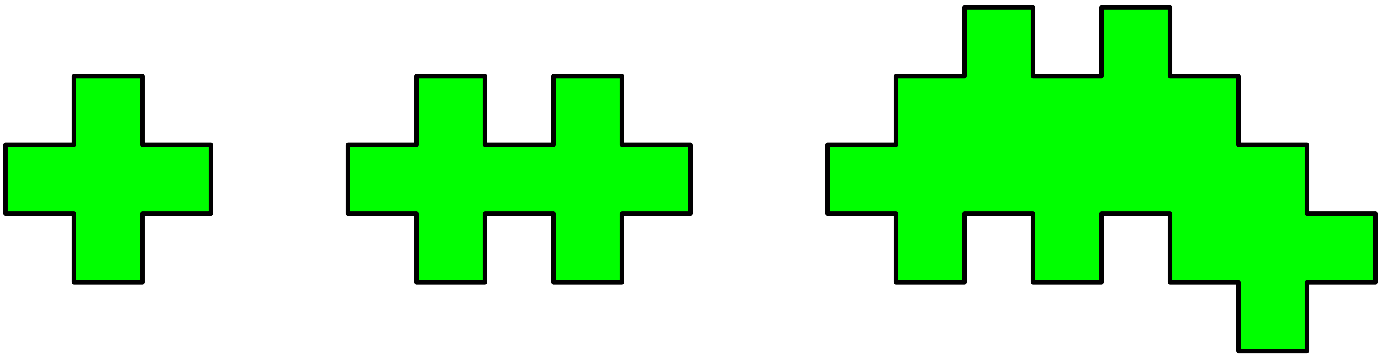
D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{33}{40}$

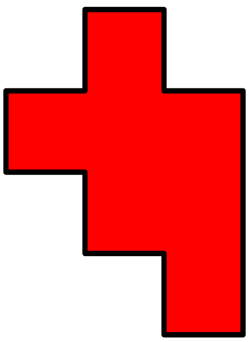
FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 05)

QUESTÃO 06

Um polígono é chamado “maisera” se todos os seus lados medem 1 unidade de comprimento e se os lados adjacentes sempre formam um ângulo reto. As figuras abaixo ilustram alguns polígonos “maisera”.



Já a figura a seguir não se trata de um polígono “maisera”, pois um de seus lados mede 3 unidades de comprimento.



Dentre as alternativas abaixo, qual é a única que pode corresponder ao perímetro de um polígono "maisera", em unidades de comprimento?

A) 2018

B) 2019

C) 2020

D) 2021

E) 2022

QUESTÃO 07

Um sistema de transmissão, que funciona perfeitamente, é composto por quatro engrenagens dispostas lado a lado, com 18, 19, 20 e 21 dentes, encaixadas de modo que duas engrenagens giram no sentido horário e duas no sentido anti-horário.

Quantos giros completos a engrenagem de 18 dentes precisa fazer para que o sistema volte à posição inicial pela primeira vez?

A) 1330

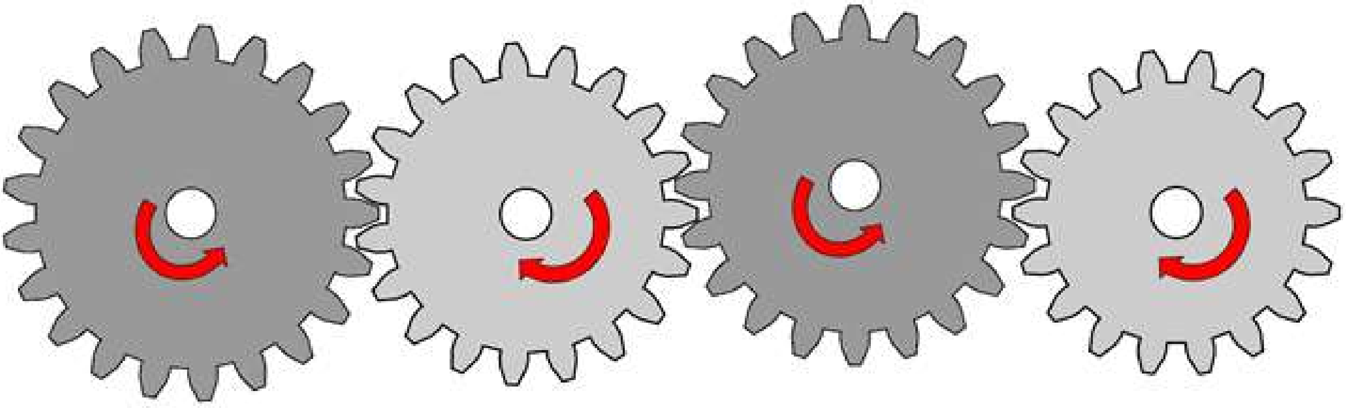
B) 7980

C) 23940

D) 56820

E) 143640

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 07)



NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 08

Existe um método bastante simples de gerar triplas pitagóricas (conjuntos de três números naturais que representam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo). O processo é o seguinte:

- Escolha dois números naturais distintos quaisquer, a e b;
- Calcule o dobro do produto de a por b;
- Calcule o valor absoluto da diferença entre os quadrados de a e b;
- Calcule a soma dos quadrados de a e b;
- Pronto! Os três números calculados formam uma tripla pitagórica.

Por exemplo, escolhendo-se os números 1 e 2, gera-se a famosa tripla pitagórica $(3,4,5)$ e, escolhendo-se os números 2 e 5, gera-se a tripla pitagórica $(20,21,29)$.

Qual é o valor absoluto da diferença entre os dois números naturais, a e b, que devem ser escolhidos para se gerarem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 145 e um dos catetos medindo 17?

A) 1

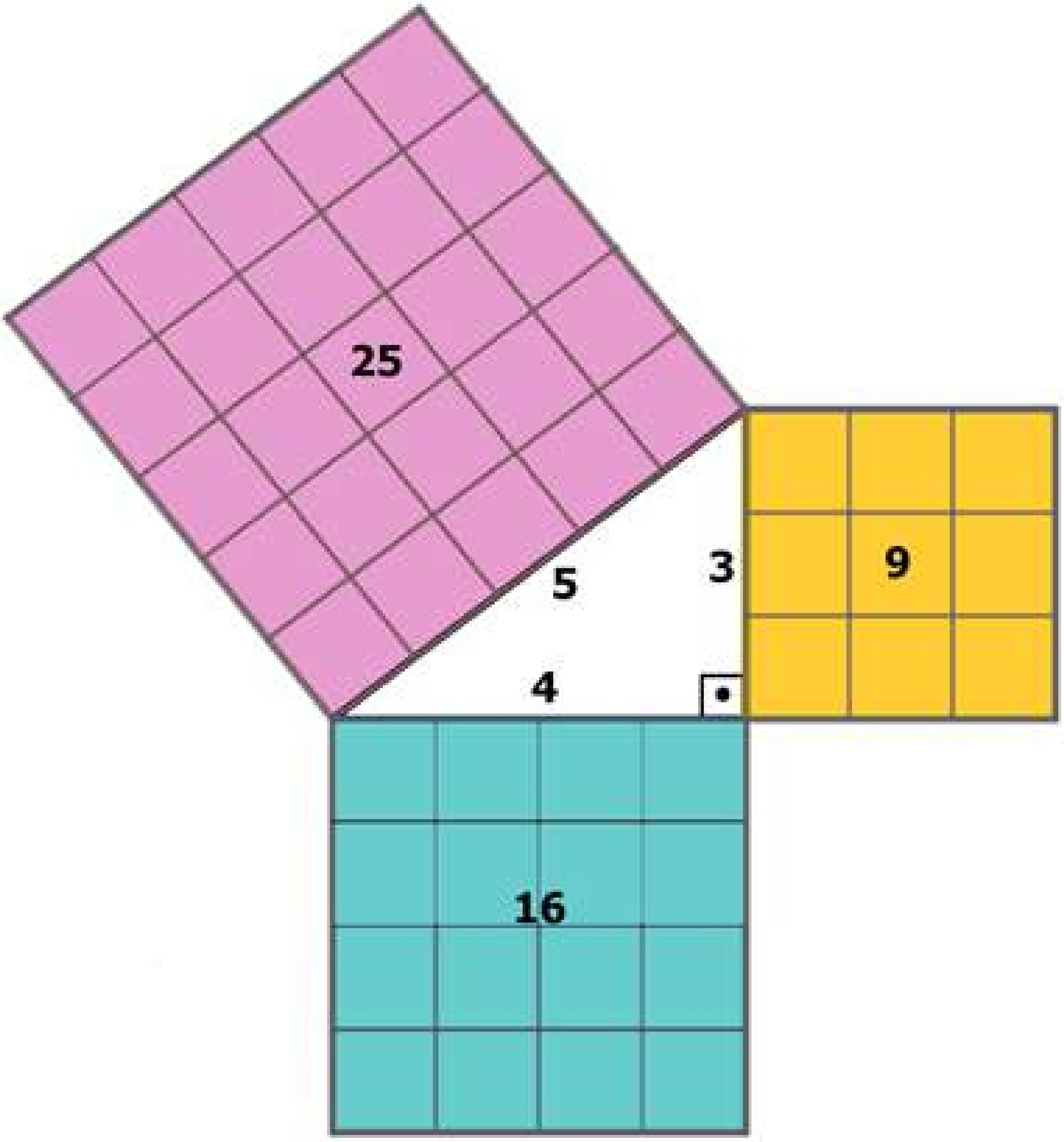
B) 5

C) 8

D) 10

E) 11

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 08)



QUESTÃO 09

Numa palestra realizada no evento da segunda fase da OMIF 2019, um grupo de oito amigos resolveu se sentar na primeira fila do auditório, que tinha exatamente oito lugares vagos consecutivos. Entre estes amigos, estavam Pedro e Marineide.

Motivados pelo ambiente em que se encontravam, resolveram calcular a quantidade de maneiras diferentes em que eles podiam se dispor de modo que, entre Pedro e Marineide, houvesse, exatamente, duas pessoas. Sabendo que eles calcularam este resultado corretamente, eles concluíram que esta quantidade é:

A) 720

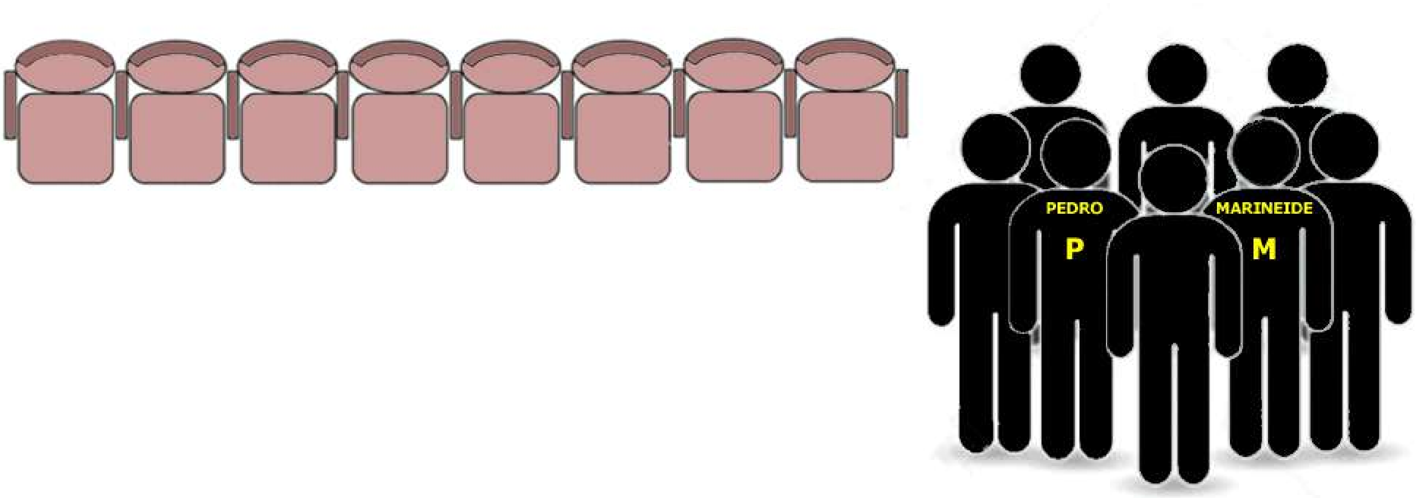
B) 1440

C) 3600

D) 7200

E) 20160

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 09)



QUESTÃO 10

Sendo a, b e c algarismos do sistema de numeração decimal, tem-se que:

$$180 \times 44400 = (2ab)^3 - (18c)^3$$

Pode-se afirmar que:

A) $a = b = c$

B) $a < b < c$

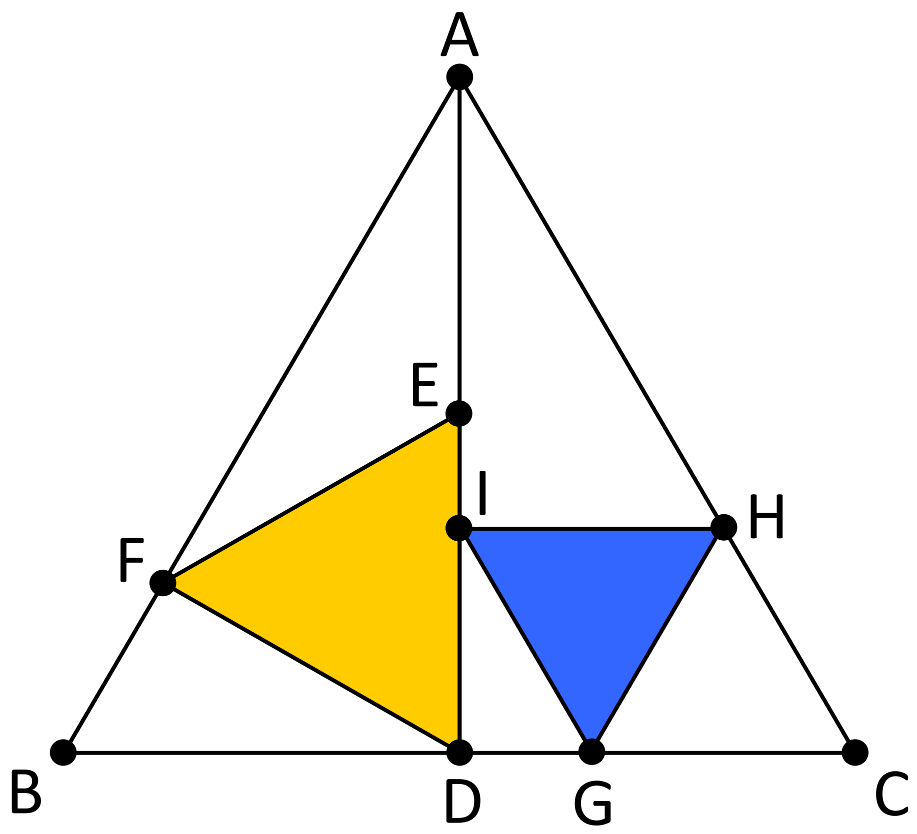
C) $c < b = a$

D) $b < a < c$

E) $b = c < a$

QUESTÃO 11

Na figura abaixo, os triângulos ABC, DEF e GHI são equiláteros. Além disso, $\overline{AD}$ é uma mediana do triângulo ABC e $\overline{IH}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



A razão entre as áreas dos triângulos DEF e GHI é:

A) $\frac{13}{8}$

B) $\dfrac{27}{16}$

C) $\dfrac{7}{4}$

D) $\dfrac{11}{6}$

E) 2

QUESTÃO 12

Sejam M e N dois números naturais, com $M < N$. O máximo divisor comum de M e N é 60 e o mínimo múltiplo comum de M e N é 2079000.

Sabendo-se que M é múltiplo de 35, mas não de 25, e que N é divisível por 24, mas não por 9, qual é o valor de $M + N$?

A) 16340

B) 27900

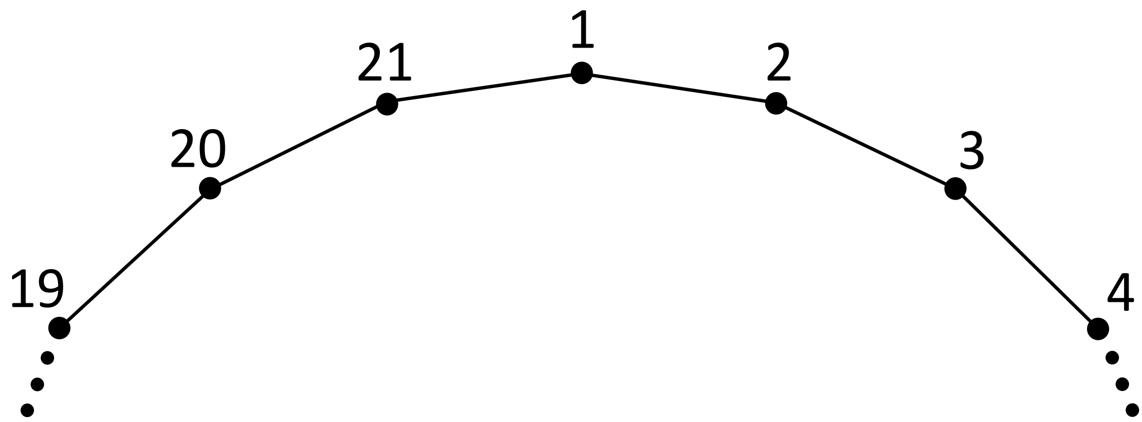
C) 36780

D) 44580

E) 45200

QUESTÃO 13

Uma aranha se desloca sobre as arestas de um hendecoságono regular (polígono de 21 lados) cujos vértices estão numerados de 1 a 21 em ordem crescente e em sentido horário. A figura abaixo ilustra parte do polígono citado.



A aranha caminha sobre o hendecoságono no sentido horário e seu ponto de partida é o vértice de número 1.

No primeiro dia, ela percorre 1 aresta do polígono, chegando ao vértice 2.

No segundo dia, ela percorre 3 arestas, parando no vértice 5.

No terceiro dia, ela percorre 5 arestas, chegando ao vértice 10. E assim, sucessivamente, a aranha faz seu trajeto, sempre percorrendo, em cada dia, duas arestas a mais do que percorreu no dia anterior.

Se esta aranha iniciou este processo no dia primeiro de janeiro de 2021, em que vértice ela se encontrará ao final do dia 19 de setembro do mesmo ano?

A) 1

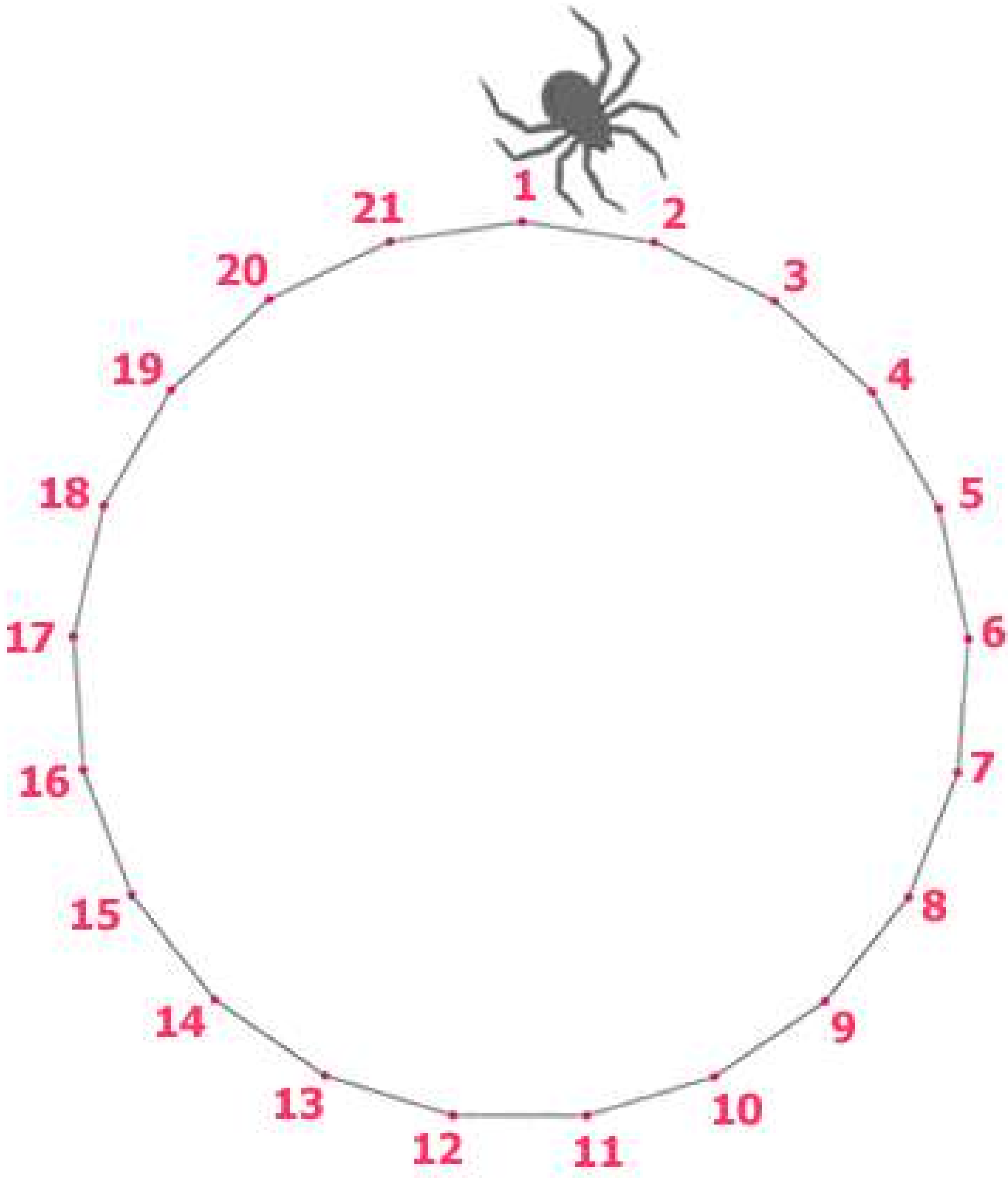
B) 5

C) 10

D) 16

E) 17

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 13)



QUESTÃO 14

Laynara, que reside na cidade A, precisou se deslocar até uma distante cidade D para visitar sua família. Para isso, ela precisou pegar 3 ônibus distintos: um que foi de A para B, outro que foi de B para C e, por fim, um que foi de C para D.

Quando estava programando sua longa viagem, Laynara havia decidido que partiria de A no dia 10 de setembro.

Além disso, para minimizar o cansaço, ela tinha decidido também que todo o percurso da viagem seria feito no menor tempo possível, a partir do primeiro embarque até o último desembarque, incluindo as esperas entre a chegada de um ônibus e a partida do próximo.

Ela tinha planejado, também, que estas esperas seriam de, no mínimo, 25 minutos, para evitar correria.

Laynara havia gerado a seguinte tabela, com os horários de partida de cada ônibus e o tempo de duração de cada etapa da viagem:

Trajeto entre as cidades	**Horário de saída dos ônibus: das 6h às 23h59, com a primeira partida às 6h e saídas de:**	**Tempo de duração do trajeto**
A para B	50 em 50 minutos	1 hora e 20 minutos
B para C	80 em 80 minutos	7 horas e 30 minutos
C para D	45 em 45 minutos	4 horas e 10 minutos

Para deixar tudo organizado, Laynara havia comprado as passagens antecipadamente, seguindo o que ela tinha planejado. Sabendo-se que tudo ocorreu conforme o previsto e que nenhum ônibus se atrasou, em que horário e dia Laynara chegou ao seu destino final?

A) 21h25 de 10 de setembro.

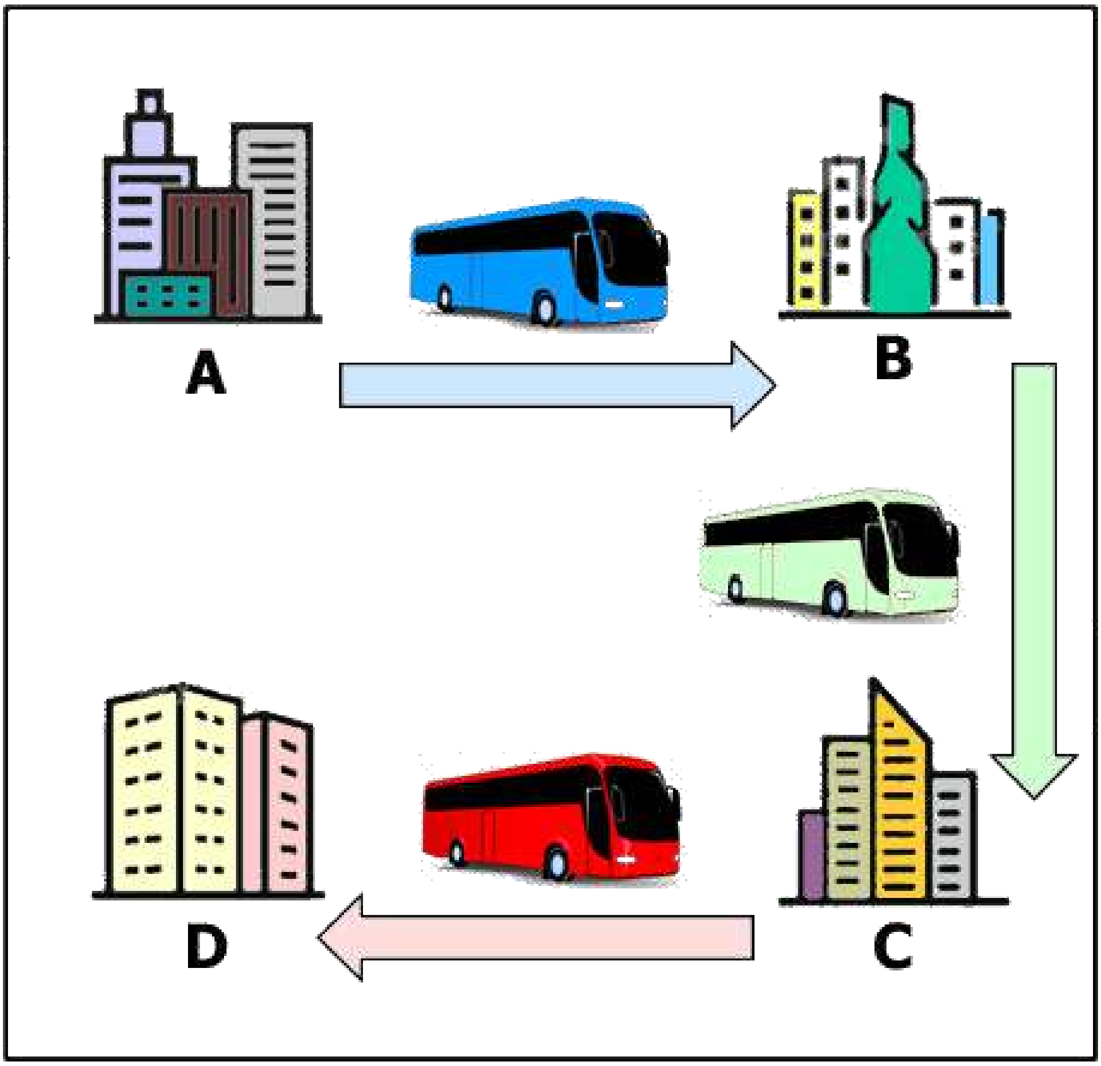
B) 22h10 de 10 de setembro.

C) 02h40 de 11 de setembro.

D) 03h25 de 11 de setembro.

E) 10h10 de 11 de setembro.

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 14)



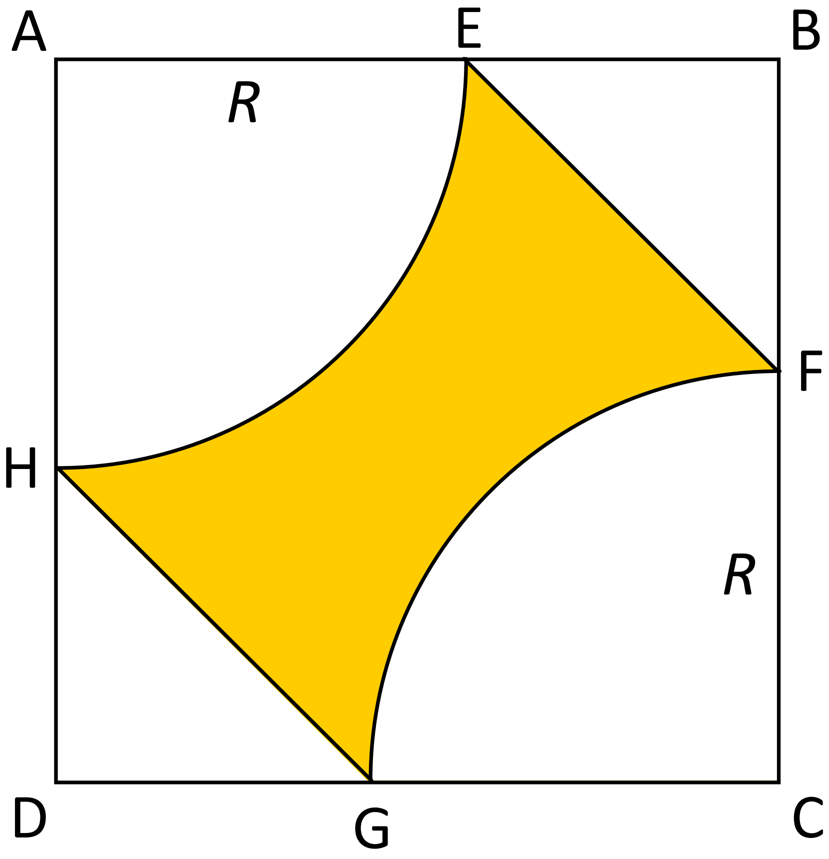
NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 15

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado fixo e $\overset{\frown}{EH}$ e $\overset{\frown}{FG}$ são arcos de circunferência com raios de mesma medida R e centros nos vértices A e C, respectivamente.

A medida R varia igualmente nos dois arcos, desde que $\overset{\frown}{EH}$ e $\overset{\frown}{FG}$ não se intersectem.

Para que a área destacada seja a maior possível, qual deve ser a razão entre a medida dos raios dos arcos e o comprimento do lado do quadrado?



A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{2}{\pi+2}$

D) $\dfrac{1}{2\pi-2}$

E) $\dfrac{2\pi-3}{6}$

QUESTÃO 16

Durante uma de suas aulas, o professor Wagner encontrou, sobre sua mesa, uma caricatura dele. O professor riu da situação, mas queria saber quem tinha feito aquele desenho.

Ele sabia que apenas quatro alunos daquela turma tinham habilidades suficientes para fazê-lo: Ana, Beto, Carlos e Daniela.

O professor, então, fez a seguinte pergunta aos quatro estudantes: quem de vocês fez esta minha caricatura? Eles fizeram as seguintes afirmações:

- Ana: Não fui eu.
- Beto: Foi a Daniela.
- Carlos: Foi o Beto.
- Daniela: O Carlos está mentindo.

Sabendo-se que realmente foi um desses quatro alunos que fez a caricatura e que exatamente dois alunos mentiram para o professor em suas afirmações, pode-se concluir que:

A) Daniela não fez a caricatura e Ana mentiu.

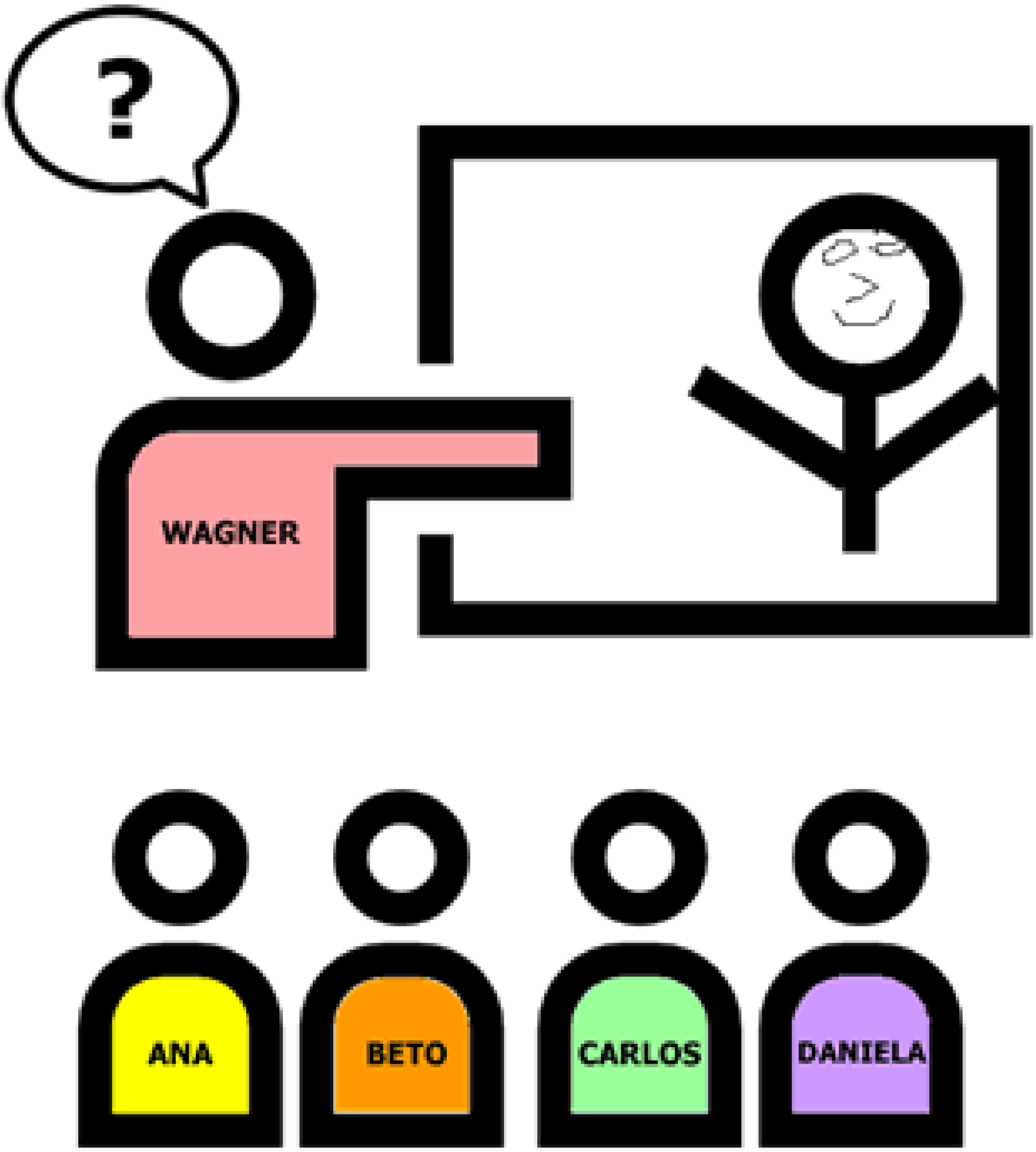
B) Ana mentiu e foi Daniela quem fez a caricatura.

C) Carlos mentiu e não foi Ana quem fez a caricatura.

D) Quem fez a caricatura foi Ana ou Daniela.

E) Beto mentiu e Ana não fez a caricatura.

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 16)

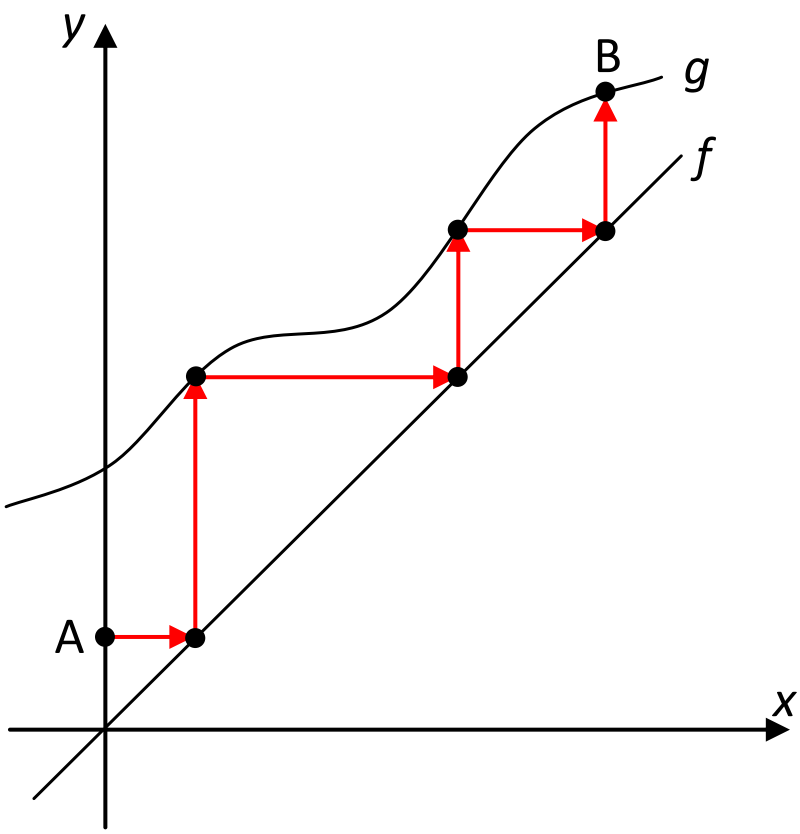


QUESTÃO 17

No plano cartesiano abaixo, está representado o trajeto que uma formiga faz para ir de A até B.

Note que ela caminha sempre na direção horizontal para direita ou vertical para cima.

Além disso, observe que o trajeto está totalmente compreendido entre os gráficos das funções reais f e g.



Se $A = (0, k)$ e $f(x) = x$, a distância total percorrida pela formiga é:

A) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + g(k) - k$

B) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + g(k) + k$

C) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) - g\big(g(k)\big) + g(k) - k$

D) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) - k$

E) $g\Big(g\big(g(k)\big)\Big) + g\big(g(k)\big) + k$

QUESTÃO 18

Uma caixa contém 30 bolas idênticas que foram numeradas de 1 a 30. Se duas bolas forem sorteadas simultaneamente dessa caixa, qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja um múltiplo de 4?

A) $\frac{1}{4}$

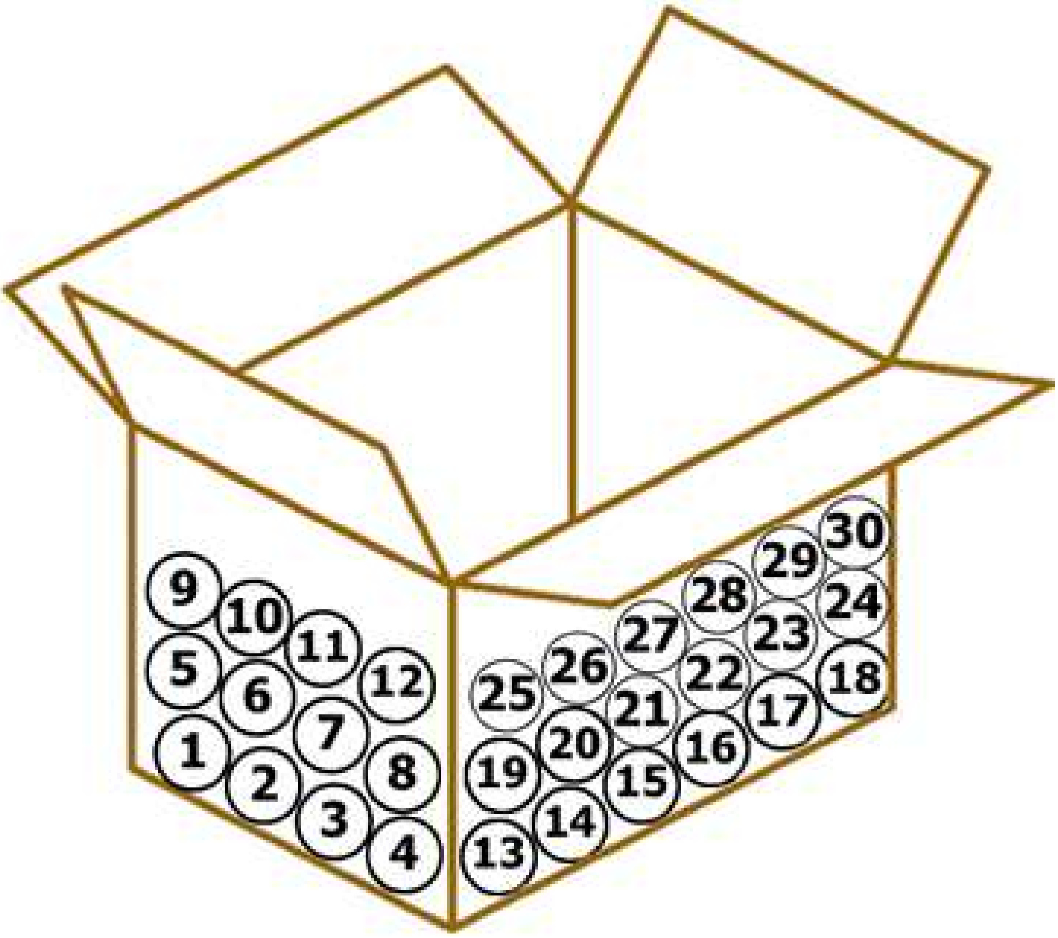
B) $\frac{7}{29}$

C) $\frac{11}{30}$

D) $\frac{15}{58}$

E) $\frac{98}{435}$

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 18)



QUESTÃO 19

A partir dos pontos médios dos lados de um quadrado, é possível construir um segundo quadrado.

A partir dos pontos médios desse novo quadrado, é possível construir um terceiro, e assim por diante, indefinidamente.

A Figura 1, mostrada a seguir, ilustra a construção dos três primeiros quadrados.

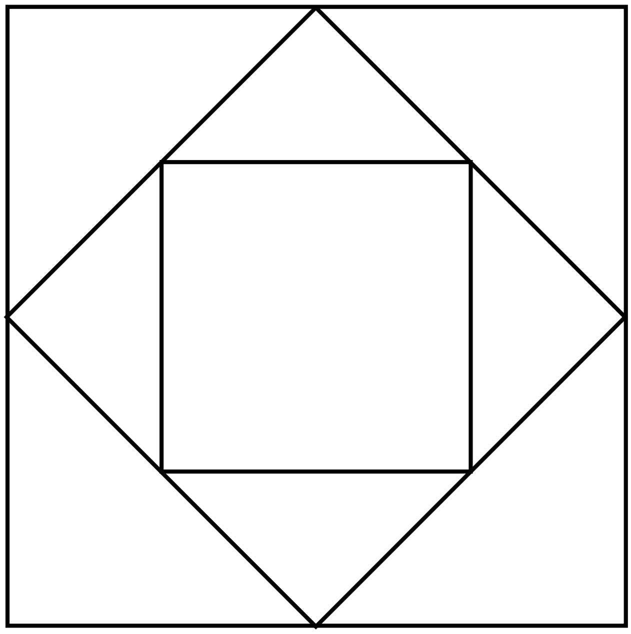


Figura 1

De maneira análoga, a partir dos pontos médios dos lados de um hexágono regular, é possível construir um segundo hexágono regular.

A partir dos pontos médios dos lados desse novo hexágono, é possível construir um terceiro, e assim por diante, indefinidamente.

A Figura 2, mostrada a seguir, ilustra a construção dos três primeiros hexágonos regulares.

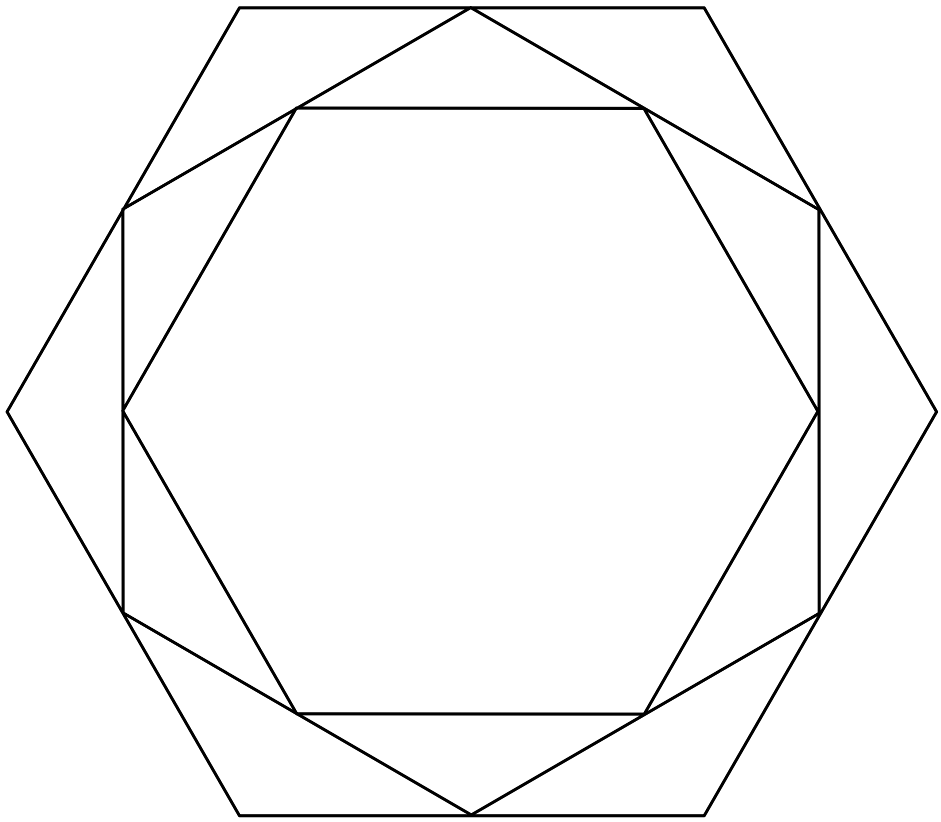


Figura 2

Considerando que estas construções foram feitas a partir de um quadrado e de um hexágono regular com lados iguais, a razão entre a soma dos perímetros dos infinitos quadrados construídos e a soma dos perímetros dos infinitos hexágonos construídos é:

A) $\frac{4-2\sqrt{3}}{6-3\sqrt{2}}$

B) $\frac{6-3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}$

C) $\frac{4-2\sqrt{2}}{6+3\sqrt{3}}$

D) $\frac{4\sqrt{2}-2}{6\sqrt{3}-3}$

E) $\frac{4\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}+2}$

QUESTÃO 20

Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma função definida por:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \cdot f(n-1), \text{se } n > 1 \end{cases}$$

O valor de $f(2021)$ é:

A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{1011}{2021}$

C) $\dfrac{2021}{2022}$

D) $\dfrac{2021}{2021^2 - 1}$

E) $1 - \dfrac{1}{2021^2}$

QUESTÃO 21

Isabela deseja contar quantas sequências podem ser formadas, usando-se exatamente quatro das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa, com as características abaixo:

- As quatro letras devem aparecer em ordem alfabética, da esquerda para a direita;
- As letras devem ser distintas e não podem ser consecutivas.

Ela começou a listar algumas das sequências: "aceg", "amor", "bjmw", "jouz", "nprv".

Isabela percebeu que existiam muitas e resolveu, então, realizar essa contagem utilizando seus conhecimentos de análise combinatória. Desta forma, ela pôde concluir corretamente que o total de sequências com as características expostas é:

A) 7315

B) 8855

C) 14950

D) 274560

E) 358800

FIGURA COMPLEMENTAR (QUESTÃO 21)