OMIF 2023 – PROVA DA 2ª FASE

24 de maio de 2024

Nome:	
Número de Identificação:	
Instituição (Sigla):	Campus:

Instruções

1. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima.
2. Esta prova é composta por 5 questões dissertativas e cada uma ocupa exatamente uma folha deste caderno de questões (frente e verso). Quando o aplicador permitir que se inicie a realização da prova:
   a) Confira se todas as 5 questões estão presentes neste caderno;
   b) Confira se o seu Número de Identificação está correto em todas as folhas com questões deste caderno. Esse número aparece no início de cada questão;
   c) Caso haja alguma inconsistência, avise o aplicador.
3. Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal. A prova pode ser resolvida a lápis ou à caneta.
4. A solução de cada item deve ser escrita apenas no local reservado para ela, de maneira organizada e legível.
5. É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando os cálculos e/ou raciocínios utilizados. Respostas sem justificava não serão consideradas na correção.
6. A prova tem duração de DUAS HORAS E TRINTA MINUTOS (2h 30min), EXCETO para estudantes com deficiências ou necessidades específicas que possuem laudo médico comprobatório. Estes terão direito a uma hora adicional para a resolução da prova.
7. É terminantemente proibido, durante a prova, qualquer comunicação entre os estudantes, acesso à internet, uso de outros materiais impressos e utilização de *tablets*, celulares, calculadoras ou qualquer outro aparelho eletrônico e/ou de comunicação, EXCETO para estudantes que fazem jus à prova adaptada, os quais poderão acessar os vídeos ou os áudios disponibilizados pela Comissão de Acessibilidade e Inclusão. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.
8. Quando terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

RASCUNHO

QUESTÃO 01 **Nº de Identificação:**

Matheus está participando de um jogo cuja regra principal consiste em escrever um número inteiro em cada jogada, formando uma sequência numérica. De acordo com essa regra, Matheus pode escrever qualquer número inteiro positivo em sua primeira jogada. Mas, a partir da segunda, ele deve escrever:

- O dobro do número escrito na jogada anterior, menos 3, se o número da jogada anterior for par.
- O triplo do número escrito na jogada anterior, mais 5, se o número da jogada anterior for ímpar.

Por exemplo, se Matheus escrever o número 10 em sua primeira jogada, a sequência que ele formará é:

$$10 \to 17 \to 56 \to 109 \to 332 \to 661 \to 1988 \to \ldots$$

a) (4 pontos) Se Matheus escrever o número 1 em sua primeira jogada, qual é o número mais próximo de 2024 que deverá aparecer na sequência numérica?

N1 N2

b) (5 pontos) Qual é o menor número que Matheus pode escrever em sua primeira jogada de modo que, seguindo a regra corretamente, o número 2024 apareça na sequência de números escritos?

N1 N2

c) (5 pontos) Mostre que, seguindo a regra corretamente, é impossível Matheus escrever um múltiplo de 3 na terceira jogada.

N1 N2

d) (6 pontos) Existe uma versão deste jogo que altera, em partes, a regra da construção da sequência numérica. Nessa versão, Matheus também pode escrever qualquer número inteiro positivo em sua primeira jogada. Porém, a partir da segunda, ele deve escrever:

- O dobro do número escrito na jogada anterior, menos 3, se o número da jogada anterior for par e menor do que 100.
- O triplo do número escrito na jogada anterior, mais 5, se o número da jogada anterior for ímpar e menor do que 100.
- A parte inteira de um décimo do número escrito na jogada anterior, se o número da jogada anterior for maior ou igual a 100.

Por exemplo, se Matheus escrever o número 5 em sua primeira jogada nessa versão do jogo, a sequência que ele deve formar é: $5 \to 20 \to 37 \to 116 \to 11 \to 38 \to 73 \to 224 \to 22 \to 41 \to \ldots$.
Assim, se Matheus escrever o número 16 em sua primeira jogada nessa versão do jogo, que número ele deverá escrever em sua 2024ª jogada?

N1 N2

QUESTÃO 02 **Nº de Identificação:**

Quatro pares de irmãos, todos estudantes de uma instituição federal, reuniram-se para jogar tênis de mesa. Desses oito alunos, exatamente quatro são mulheres (Alice, Bianca, Carla e Daniela) e os outros quatro são homens (Evandro, Francisco, Gabriel e Hugo), sendo cada par de irmãos composto por um homem e uma mulher. Todas as partidas ocorreram em uma única mesa e eles combinaram de respeitar as seguintes regras:

- Regra 1: Cada partida só pode ser realizada entre um homem e uma mulher.
- Regra 2: Irmãos não podem jogar entre si.
- Regra 3: Nenhuma pessoa pode jogar duas partidas seguidas.

As cinco primeiras partidas já aconteceram e sabe-se que:

- Na primeira partida, Bianca jogou contra Evandro.
- Na segunda partida, Alice jogou contra o irmão de Daniela.
- Na terceira partida, a irmã de Evandro jogou contra o irmão de Alice.
- Na quarta partida, Bianca jogou contra Francisco.
- Na quinta partida, a irmã de Gabriel jogou contra Evandro.

a) (4 pontos) Com base nas informações do texto, estaria correto afirmar que a terceira partida foi disputada entre Bianca e Gabriel? Além disso, seria possível Carla enfrentar Evandro em alguma partida seguinte? Justifique cada resposta.

N1 N2

b) (8 pontos) Complete a tabela abaixo, identificando cada par de irmãos, e escreva quais foram os argumentos lógicos utilizados para se chegar a essas conclusões.

Irmã	Irmão
Alice	
Bianca	
Carla	
Daniela	

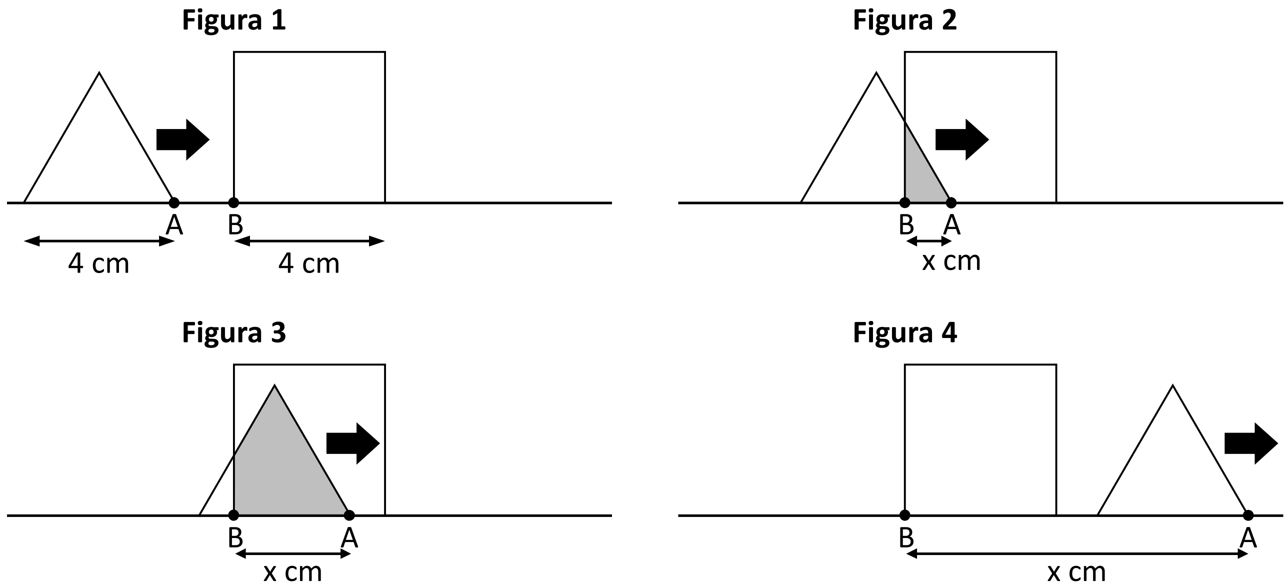
N1 N2

c) (8 pontos) Os estudantes decidem que vão realizar exatamente oito partidas no total e, para definir quais serão os competidores de cada uma das três partidas finais, resolvem fazer um sorteio. Para isso, cada um dos oito estudantes escreve seu nome em um cartão e o coloca em uma urna, observando que os cartões eram idênticos inicialmente. Em seguida, um deles retira, de maneira aleatória, dois cartões dessa urna ao mesmo tempo. Eles combinam que, se os dois nomes retirados respeitarem as três regras colocadas no início, a próxima partida deve acontecer entre eles e os cartões devem ser devolvidos à urna. Caso contrário, eles devem devolver os cartões à urna e fazer um novo sorteio. Esse procedimento será realizado até que as três partidas finais tenham ocorrido. Diante dessas informações, determine a probabilidade de os oito estudantes terem jogado exatamente a mesma quantidade de vezes ao final das oito partidas.

N1 N2

QUESTÃO 03 **Nº de Identificação:**

A Figura 1, abaixo, mostra um triângulo equilátero e um quadrado apoiados sobre uma reta horizontal. Os dois polígonos são coplanares, todos os seus lados medem 4 cm e A e B são dois de seus vértices. Em um determinado momento, o triângulo começa a se deslocar para a direita, enquanto o quadrado permanece fixo na mesma posição. As Figuras 2, 3 e 4 ilustram alguns instantes desse deslocamento, com x representando a distância, em cm, entre os vértices A e B quando A está à direita de B.



Para cada valor de x, com $0 \le x \le 10$, seja $A(x)$ a área, em cm², da região comum aos dois polígonos, exemplificada e destacada em cinza nas figuras 2 e 3.

a) (6 pontos) Calcule $A(1)$, $A(3)$ e a área máxima da região comum aos dois polígonos.

N1 N2

b) (6 pontos) Para que valores de x a área da região comum aos dois polígonos é igual a $\left(24-10\sqrt{3}\right)$ cm^2 ?

Utilize, se necessário, que $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

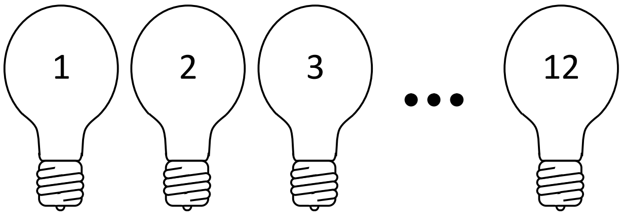
N1 N2

c) (8 pontos) Para $0 \le x \le 10$, escreva as expressões de $A(x)$ em função de x. Observe que essa função deve ser definida por mais de uma sentença.

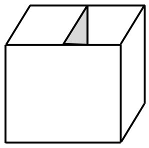
N1 N2

QUESTÃO 04 **Nº de Identificação:**

Em um dia de folga, Aristóteles encontra 12 lâmpadas perfeitas guardadas há muito tempo no porão de sua casa. Elas estão numeradas de 1 a 12 e, quando estão apagadas, são todas idênticas, exceto pela numeração nelas estampada.

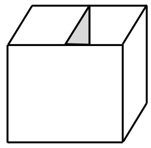


a) (5 pontos) Aristóteles decide colocar essas lâmpadas em 6 caixas idênticas que comportam exatamente duas lâmpadas cada, conforme ilustração ao lado. De quantas maneiras diferentes as 12 lâmpadas podem ficar acomodadas nas 6 caixas de modo que cada caixa contenha exatamente uma lâmpada com numeração ímpar e uma com numeração par? Considere que a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante.



N1 N2

b) (7 pontos) De quantas maneiras diferentes as 12 lâmpadas podem ficar acomodadas nas 6 caixas mencionadas no item anterior de modo que, em cada caixa, a numeração de uma lâmpada seja igual a, pelo menos, o dobro da numeração da outra? Considere, novamente, que a disposição das caixas e das lâmpadas dentro de cada caixa é irrelevante.



N1 N2

c) (8 pontos) Quando acesas, Aristóteles sabe que 8 dessas lâmpadas exibem cor azul e que as outras 4 exibem cor vermelha, mas não se lembra quais lâmpadas exibem cada cor. Ele tentará acertar a cor da luz das 12 lâmpadas, escrevendo o seu palpite em cada uma delas com uma caneta especial. Ele anotará "Azul" em exatamente 8 lâmpadas e "Vermelha" em exatamente 4. Em seguida, fará o teste acendendo todas as lâmpadas para descobrir quantos acertos teve. Qual é a probabilidade de ele acertar a cor da luz de, pelo menos, 8 lâmpadas?

N1 N2

QUESTÃO 05 **Nº de Identificação:**

Rafaela possui exatamente 10 baldes de mesmo volume, sendo alguns deles azuis e os demais vermelhos. Inicialmente, cada balde contém uma quantidade de água, não sendo essas quantidades necessariamente iguais entre si. Sabe-se apenas que o volume total de água contido nos baldes azuis é igual a cinco vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Cada um desses baldes é colocado sob uma torneira e, em seguida, todas são ligadas simultaneamente, à vazão de 1 litro por minuto. Após um minuto, o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual a quatro vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Decorridos mais quatro minutos, todas as torneiras são desligadas ao mesmo tempo e o volume total de água contido nos baldes azuis fica igual três vezes o volume total de água contido nos baldes vermelhos. Sabe-se, também, que a água não chegou a transbordar em balde algum.

a) (8 pontos) Com base nas informações do texto, determine quantos baldes azuis Rafaela possui e quantos litros de água estavam nos baldes vermelhos, no total, logo após as torneiras serem desligadas.

N1 N2

b) (6 pontos) Após desligar as torneiras, Rafaela despeja toda a água contida nos 10 baldes em um grande reservatório que, inicialmente, estava vazio. Em seguida, retira deste reservatório um volume V de água e acrescenta o mesmo volume V de álcool puro, misturando os líquidos e obtendo uma solução homogênea. Logo depois, Rafaela retira um volume V da solução contida no reservatório e, novamente, acrescenta o mesmo volume V de álcool puro. No final desse processo, o reservatório fica com 45 litros de água. Determine o valor de V, em litros.

N1 N2

c) (6 pontos) Se Rafaela continuar realizando esse processo, retirando, cada vez, um volume V da solução homogênea contida no reservatório e acrescentando e misturando, em seguida, o mesmo volume V de álcool puro, quantos litros de álcool ela terá despejado no reservatório, no total, até que o volume de água nele fique o mais próximo possível de 6 litros? Considere que V tem o mesmo valor do item anterior e utilize, se necessário, as seguintes aproximações para as potências de 0,75:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0,75^x$	0,750	0,563	0,422	0,316	0,237	0,178	0,133	0,100	0,075	0,056

N1 N2