



**OLIMPÍADA DE  
MATEMÁTICA DAS  
INSTITUIÇÕES FEDERAIS**

## **OMIF 2022 – PROVA DA 2ª FASE**

**19 de maio de 2023**

Nome:	
Número de Identificação:	
Instituição (Sigla):	Campus:

### **Instruções**

1. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima.
2. Esta prova é composta por 5 questões dissertativas e cada uma ocupa exatamente uma folha deste caderno de questões (frente e verso). Quando o aplicador permitir que se inicie a realização da prova:
  - a) Confira se todas as 5 questões estão presentes neste caderno;
  - b) Confira se o seu Número de Identificação está correto em todas as folhas com questões deste caderno. Este número aparece no início de cada questão;
  - c) Caso haja alguma inconsistência, avise o aplicador.
3. Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal. A prova pode ser resolvida a lápis ou à caneta.
4. A solução de cada item deve ser escrita apenas no local reservado para ela, de maneira organizada e legível.
5. É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando os cálculos e raciocínios utilizados. Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.
6. A prova tem duração de DUAS HORAS E TRINTA MINUTOS (2h 30min), EXCETO para estudantes com deficiências ou necessidades específicas que possuem laudo médico comprobatório. Estes terão direito a uma hora adicional para a resolução da prova.
7. É terminantemente proibido, durante a prova, qualquer comunicação entre os estudantes, acesso à internet, uso de outros materiais impressos e utilização de *tablets*, celulares, calculadoras ou qualquer outro aparelho eletrônico e/ou de comunicação, EXCETO para estudantes que fazem jus à prova adaptada, os quais poderão acessar os vídeos ou os áudios disponibilizados pela Comissão de Acessibilidade e Inclusão. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.
8. Quando terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

RASCUNHO

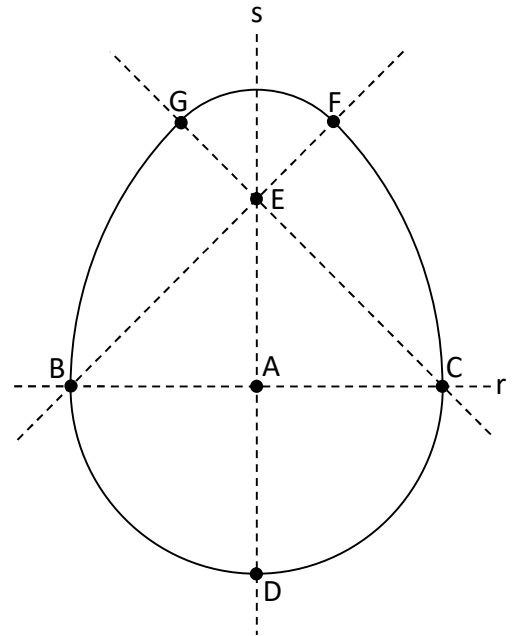


QUESTÃO 01

Nº de Identificação:

O traço contínuo da figura abaixo exibe o desenho de um ovo que foi construído a partir da união de alguns arcos de circunferência, os quais usaram as retas (linhas tracejadas) e os pontos mostrados como base para serem traçados. A figura toda foi construída seguindo-se os seguintes passos:

- 1) Trace duas retas perpendiculares,  $r$  e  $s$ , e seja  $A$  o ponto de intersecção dessas retas.
- 2) Trace uma semicircunferência de centro em  $A$  e raio de medida 2 cm. Ela deve intersectar a reta  $r$  em dois pontos,  $B$  e  $C$ , e a reta  $s$  em um único ponto,  $D$ .
- 3) Marque o ponto  $E$ , simétrico de  $D$  em relação à reta  $r$ .
- 4) Trace as retas  $\overline{BE}$  e  $\overline{CE}$ .
- 5) Trace o menor arco de circunferência de centro em  $B$ , raio de medida  $BC$  e ângulo central  $\widehat{CBE}$ . As extremidades do arco construído serão os pontos  $C$  e  $F$ .
- 6) Trace o menor arco de circunferência de centro em  $C$ , raio de medida  $CB$  e ângulo central  $\widehat{BCE}$ . As extremidades do arco construído serão os pontos  $B$  e  $G$ .
- 7) Trace o menor arco de circunferência de centro em  $E$ , raio de medida  $EF$  e ângulo central  $\widehat{FEG}$ .



a) (6 pontos) Com base nestas informações, determine o perímetro do desenho do ovo.

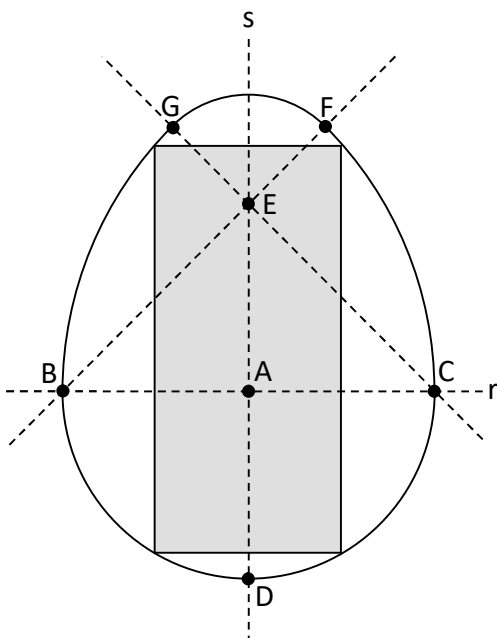
N1  N2  N3



b) (7 pontos) Qual é a área da região delimitada pelo desenho do ovo?

N1	N2	N3
----	----	----

c) (7 pontos) Considere um retângulo inscrito no desenho do ovo como na figura abaixo. Se dois de seus lados são paralelos à reta  $r$  e medem 2 cm, qual é a área deste retângulo?



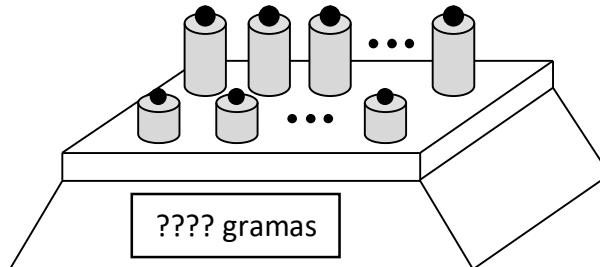
N1	N2	N3
----	----	----



QUESTÃO 02

Nº de Identificação:

Em uma balança eletrônica são colocados 125 pesos. Exatamente  $k$  desses pesos têm massa  $m$ , de medida inteira em gramas, e o restante tem massa  $\frac{m}{2}$ , não necessariamente de medida inteira em gramas.



a) (3 pontos) Se  $k = 75$  e  $m = 9$  gramas, qual é a massa registrada pela balança?

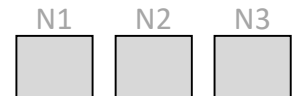
N1  N2  N3

b) (3 pontos) Se  $m = 20$  gramas, qual deve ser o valor de  $k$  para que a balança registre 1650 gramas?

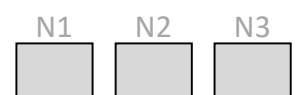
N1  N2  N3



c) (8 pontos) Para que a balança registre 2023 gramas, quais devem ser os valores de  $k$  e de  $m$ ?



d) (6 pontos) Após serem usados, todos os 125 pesos devem ser guardados em uma caixa. Para realizar esta tarefa, Amanda e Bruno elaboram um jogo no qual eles devem, alternadamente, guardar de 1 a 5 pesos na caixa, começando por Amanda. Vence o jogo quem conseguir guardar o(s) último(s) peso(s). Existe uma estratégia vencedora para as jogadas de Amanda que faz com que ela garanta sua vitória desde o início, independentemente das jogadas de Bruno. Que estratégia é essa? Quantos pesos Amanda deve guardar na sua primeira jogada segundo essa estratégia?





**QUESTÃO 03**

**Nº de Identificação:**

Ana e Bia devem entregar um único relatório para uma disciplina da escola e precisam decidir quem será a responsável por passá-lo a limpo. Para isso, resolvem usar uma caixa que seu professor de matemática havia deixado na sala para explicar probabilidade à turma. Dentro da caixa, há exatamente 3 bolas azuis, 4 bolas brancas e 4 bolas cinzas, todas idênticas, exceto pela cor. Elas combinam o seguinte: Ana deve retirar, ao mesmo tempo, duas bolas desta caixa de maneira aleatória e verificar as suas cores. Se ambas tiverem a mesma cor, então Ana deve passar o relatório a limpo. Caso contrário, ela deve devolver as bolas à caixa e Bia deverá realizar o mesmo procedimento. Elas vão se alternando nas retiradas e a primeira que obtiver duas bolas com a mesma cor será a responsável por passar o relatório a limpo.

**a) (5 pontos)** Qual é a probabilidade de Ana obter duas bolas de mesma cor já na sua primeira retirada?

---

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

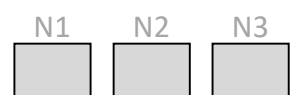
**b) (7 pontos)** Qual é a probabilidade de Bia ter que passar o relatório a limpo?

---

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>



c) (8 pontos) Após ficar decidido quem irá passar o relatório a limpo, Ana e Bia decidem dispor todas as 11 bolas em linha reta de modo que não existam duas bolas brancas adjacentes. Quantas disposições diferentes respeitam esta condição?







QUESTÃO 04

Nº de Identificação:

Em um campeonato de xadrez que ocorreu em uma escola, os estudantes Aldo, Beto, Carlos e Danilo foram os semifinalistas e apenas um deles se consagrou campeão. O diretor da escola conhecia os quatro semifinalistas, mas não sabia quem, dentre eles, tinha sido o vencedor. Tendo encontrado os quatro reunidos, o diretor fez a seguinte pergunta a eles: “Quem de vocês foi o campeão do campeonato de xadrez?” Eles responderam o seguinte:

- Aldo: Não fui eu.
- Beto: Foi o Carlos.
- Carlos: Foi o Danilo.
- Danilo: O Beto está mentindo.

**a) (6 pontos)** Se somente um dos alunos mentiu, quem foi o campeão do campeonato de xadrez? Justifique sua resposta.

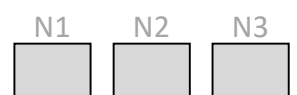
N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

**b) (6 pontos)** Se somente um dos alunos disse verdade, quem foi o campeão do campeonato de xadrez? Justifique sua resposta.

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>



**c) (8 pontos)** Se somente 2 dos 4 alunos mentiram, é possível deduzir quem foi o campeão do campeonato de xadrez? Em caso afirmativo, diga quem foi e explique como chegou a esta conclusão. Caso contrário, justifique por que não é possível fazer esta dedução.





QUESTÃO 05

Nº de Identificação:

Gabriela possui uma calculadora bastante incomum que só funciona com números inteiros e possui apenas as dez teclas numéricas padrão (de 0 até 9) e quatro teclas especiais que realizam as seguintes operações:

- O** → Subtrai 9 do número que está no visor.
- M** → Eleva ao quadrado o número que está no visor.
- I** → Soma 3 ao número que está no visor.
- F** → Soma os algarismos do número que está no visor.

Quando o visor da calculadora mostra um número inteiro e uma tecla especial é pressionada, o resultado da operação é exibido imediatamente no visor, substituindo o número anterior. Por exemplo, se Gabriela digitar o número 5 nesta calculadora e pressionar as teclas  **O**,  **M**,  **I** e  **F**, nesta ordem, os números que aparecerão no visor serão – 4, 16, 19 e 10, respectivamente.

**a) (4 pontos)** Gabriela digitou um número nesta calculadora e pressionou as teclas  **O**,  **M** e  **I**, nesta ordem. Para sua surpresa, o número que ela digitou é igual ao número que apareceu por último no visor. Quais números ela pode ter digitado?

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

**b) (4 pontos)** Gabriela digitou o número 19 e, em seguida, pressionou 2023 teclas especiais na ordem definida pelo padrão abaixo:

**O**,  **M**,  **I**,  **F**,  **O**,  **M**,  **I**,  **F**,  **O**,  **M**,  **I**,  **F**, ...,  **O**,  **M**,  **I**

Que número apareceu por último no visor da calculadora?

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>



c) (4 pontos) Seja  $x$  o número que está no visor da calculadora. Mostre que, se  $x$  não for múltiplo de 3, então é impossível fazer o número 2022 aparecer no visor utilizando apenas as teclas **M** e **I**, independentemente da ordem e de quantas vezes cada uma for pressionada.

---

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

d) (8 pontos) Seja  $x$  um número inteiro que está no visor da calculadora. Qual é o menor número que pode aparecer no visor após serem pressionadas, nesta ordem, as teclas **O**, **M** e **I**? Mostre que este também é o menor número que pode aparecer no visor após serem pressionadas, nesta ordem, as teclas **O**, **M**, **I** e **F**.

---

N1	N2	N3
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>