OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

OMIF 2023

Resolução Comentada da Prova de Primeira Fase

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

Alaor, Belaor e Celaor são três amigos cujos aniversários de 15 anos ocorreram numa mesma semana, mas em dias diferentes, de segunda a quarta-feira. Na terça-feira da referida semana, eles disseram o seguinte para seu professor de matemática:

- Alaor: Ontem foi o aniversário de Belaor.
- Belaor: Farei aniversário amanhã.
- Celaor: Fiz aniversário ontem.

Se apenas um deles mentiu para o professor, pode-se concluir corretamente que:

A) Alaor é o mais novo dos três amigos.
B) Belaor é o mais velho dos três amigos.
C) Nem todos tinham a mesma idade um dia após a conversa com o professor.

D) No dia da conversa com o professor, eles tinham a mesma idade.

E) Alaor fez aniversário no dia da conversa com o professor.

RESPOSTA DA QUESTÃO 01: Alternativa E
RESOLUÇÃO

Sabe-se que a conversa com o professor aconteceu na terça-feira e que cada um dos amigos fez aniversário em um dia diferente da mesma semana, de segunda a quarta-feira. Considerando que apenas um dos três amigos mentiu, vamos analisar as seguintes possibilidades:

- <u>1ª possibilidade</u>: Se foi Alaor quem mentiu.

  Nesse caso, Belaor e Celaor teriam falado a verdade. Logo, Belaor teria feito aniversário no dia seguinte (quarta-feira) e Celaor teria feito aniversário no dia anterior (segunda-feira). Desta forma, Alaor teria feito aniversário na terça-feira, dia da conversa com o professor. Esta possibilidade satisfaz todas as condições do enunciado e não traz contradições.

- 2ª possibilidade: Se foi Belaor quem mentiu.

  Nesse caso, Alaor e Celaor teriam falado a verdade. Mas isso é impossível, pois Alaor afirmou que Belaor fez aniversário no dia anterior e Celaor afirmou que foi ele quem fez aniversário no dia anterior, contradizendo o fato de que os três amigos fazem aniversário em dias diferentes.

- 3ª possibilidade: Se foi Celaor quem mentiu.

  Nesse caso, Alaor e Belaor teriam falado a verdade. Mas isso é impossível, pois Alaor afirmou que Belaor fez aniversário no dia anterior e Belaor afirmou que ele faria aniversário no dia seguinte.

Como a 1ª possibilidade é a única que não apresenta contradições, pode-se concluir que foi Alaor quem mentiu e que, portanto, ele fez aniversário no dia da conversa com o professor, conforme indica a alternativa E.

QUESTÃO 02

Na operação de adição indicada a seguir, as letras A, B e C representam algarismos distintos do sistema de numeração decimal.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & B & B & B \\ & C & C & C \\ \hline 1 & 9 & C & B \end{array}$$

Desse modo, o valor de $A^2 - B^2 + C^2$ é:

A) 36

B) 33

C) 21

D) 18

E) 16

RESPOSTA DA QUESTÃO 02: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Vamos fazer uma análise da operação de adição indicada, começando pelos algarismos da unidade.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & \boxed{A} \\ + & B & B & \boxed{B} \\ & C & C & \boxed{C} \\ \hline 1 & 9 & C & \boxed{B} \end{array}$$

Observe que deve-se ter:

$$\begin{cases} A+B+C=B & \Rightarrow & A+C=0 \\ \quad \text{ou} & & \\ A+B+C=10+B & \Rightarrow & A+C=10 \\ \quad \text{ou} & & \\ A+B+C=20+B & \Rightarrow & A+C=20 \end{cases}$$

Note que, como A, B e C representam algarismos distintos do sistema de numeração decimal, é impossível obter $A+C=0$, já que a única maneira disso acontecer seria ter $A = C = 0$. Além disso, como A e C são menores ou iguais a 9, também é impossível obter $A + C = 20$. Logo, tem-se $A + C = 10$ e "vai 1" nos algarismos da dezena.

Agora, vamos analisar os algarismos da dezena da operação de adição indicada:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & A & \boxed{A} & A \\
+ & B & \boxed{B} & B \\
 & C & \boxed{C} & C \\
\hline
1 & 9 & \boxed{C} & B
\end{array}
$$

Note que deve-se ter:

$$
\begin{cases}
1 + A + B + C = C & \Rightarrow \quad A + B = -1 \\
\quad \text{ou} & \\
1 + A + B + C = 10 + C & \Rightarrow \quad A + B = 9 \\
\quad \text{ou} & \\
1 + A + B + C = 20 + C & \Rightarrow \quad A + B = 19
\end{cases}
$$

Como é impossível obter $A+B=-1$ e $A+B=19$, conclui-se que $A+B=9$ e "vai 1" nos algarismos da centena.

Por fim, vamos fazer uma análise dos algarismos da centena da operação de adição indicada.

$$\begin{array}{cccc}
 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\
 & A & A & A \\
+ & B & B & B \\
 & C & C & C \\
\hline
1 & 9 & C & B
\end{array}$$

Observe que é necessário que se tenha:

$$1+A+B+C=19 \qquad \Rightarrow \qquad A+B+C=18$$

Com estas informações, é possível montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A+C=10 \ \ (1) \\ A+B=9 \ (2) \\ A+B+C=18 \ \ (3) \end{cases}$$

Por (2) e (3), tem-se:

$$9+C=18 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=9}$$

Assim, por (1), tem-se:

$$A+9=10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=1}$$

Finalmente, por (2), tem-se:

$$1+B=9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=8}$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} A^2-B^2+C^2 &= 1^2-8^2+9^2 \\ &= 1-64+81 \\ &= 18 \end{aligned}$$

QUESTÃO 03

O novo modelo de placas de identificação veicular do Brasil, que já está em circulação há alguns anos, possui um padrão de estampagem composto de sete caracteres alfanuméricos, na sequência LLLNLNN, em que L representa uma das 26 letras maiúsculas do nosso alfabeto e N um dos algarismos de 0 a 9 do sistema de numeração decimal. Assim, OMI7F89 e BON0D07 são exemplos de placas desse novo modelo. Utilizando todas as letras da palavra OMIF e apenas os algarismos 0, 2 e 3, sem repetição, quantas placas diferentes desse modelo podem ser fabricadas de modo que a letra F apareça antes da letra M?

A) 36
B) 48
C) 72
D) 144
E) 324

RESPOSTA DA QUESTÃO 03: Alternativa C

RESOLUÇÃO

A questão pede a quantidade de placas diferentes desse modelo que podem ser fabricadas utilizando os caracteres O, M, I, F, 0, 2 e 3 de modo que a letra F apareça antes da letra M. Como a posição das letras já está definida neste modelo de placa, bem como a posição dos algarismos, podemos pensar nas ordenações desses dois tipos de caracteres separadamente.

A quantidade total de ordenações possíveis para os algarismos é igual a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

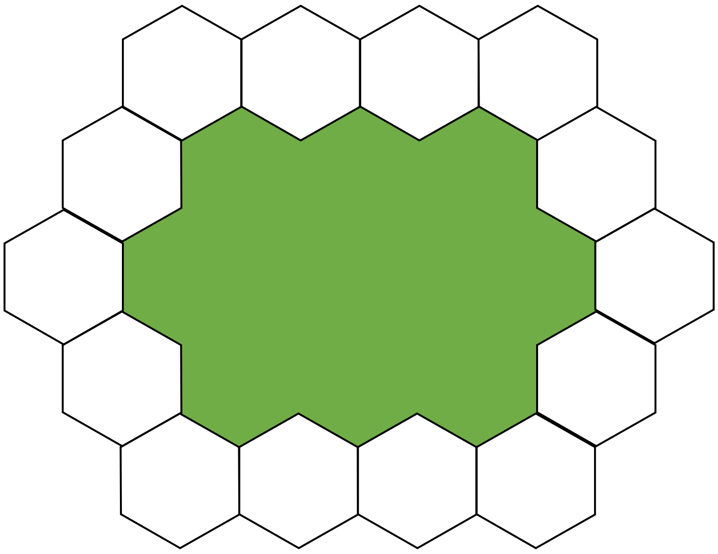
Já para as letras, a quantidade total de ordenações possíveis é igual a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Perceba que a letra F aparece antes da letra M em exatamente metade dessas ordenações. Para se convencer disso, basta observar que, para cada ordenação em que a letra F aparece antes da letra M, existe uma outra que se resulta da simples troca de posição dessas duas letras.

Logo, a quantidade de placas que podem ser fabricadas com as características solicitadas é igual a:

$$6 \cdot 12 = 72$$

QUESTÃO 04

A figura abaixo é formada por 14 hexágonos regulares congruentes e por um polígono de 22 lados, cujo interior está pintado. Se a área deste polígono de 22 lados é igual a $30\sqrt{3}$ cm^2, então a medida, em cm, do lado de cada hexágono regular é igual a:



A) $\sqrt{1}$

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

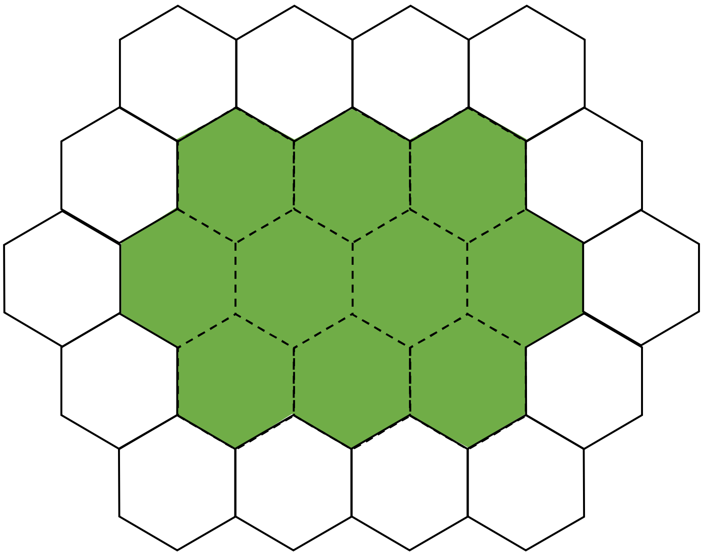
D) $\sqrt{4}$

E) $2\sqrt{3}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 04: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Note que a região ocupada pelo polígono de 22 lados também poderia ser ocupada por 10 hexágonos regulares congruentes aos que já estão na figura:



Deste modo, a área desse polígono de 22 lados é igual à área de 10 hexágonos regulares. Sendo L a medida do lado de cada hexágono da figura, e lembrando que a área de um hexágono regular pode ser calculada a partir da relação $A_{\text{Hexágono}} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, tem-se que:

$$A_{\text{Polígono 22 lados}} = 10 \cdot A_{\text{Hexágono}}$$

$$30\cancel{\sqrt{3}} = 10 \cdot 6 \cdot \frac{L^2 \cancel{\sqrt{3}}}{4}$$

$$30 = 15 \cdot L^2$$

$$L^2 = 2$$

$$\boxed{L = \sqrt{2}\ \text{cm}}$$

QUESTÃO 05

Uma professora de matemática pediu ao seu aluno Pedro para que ele resolvesse dois sistemas lineares que estavam anotados no quadro, enquanto ela ia rapidamente até a sala dos professores. Pedro sabia que, nas equações dos sistemas, as incógnitas apareciam apenas nos primeiros membros e os termos independentes apareciam apenas nos segundos membros. Porém, antes que ele pudesse ver o que estava escrito, seu amigo, Jotinha, apagou parte dos sistemas, que ficaram da maneira ilustrada a seguir:

$$\begin{cases} x - 2y = \blacksquare \\ -x + y = -1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3x + y = \blacksquare \\ \blacksquare\blacksquare\blacksquare = \blacksquare \end{cases}$$

Mesmo assim, Pedro conseguiu resolvê-los corretamente, pois um outro colega lhe disse que tinha visto que os três termos independentes apagados eram iguais entre si e que a professora havia dito que os sistemas eram equivalentes, ou seja, que apresentavam a mesma solução. Os termos independentes apagados eram o número:

A) -3

B) 1

C) 2

D) 3

E) 5

RESPOSTA DA QUESTÃO 05: Alternativa E

RESOLUÇÃO

Primeiramente, observe que é possível igualar o primeiro membro da primeira equação do primeiro sistema linear com o primeiro membro da primeira equação do segundo sistema linear, já que ambas as expressões são iguais a um mesmo valor (termos independentes apagados) e ambos os sistemas apresentam a mesma solução, já que são equivalentes. Logo:

$$x-2y=-3x+y \;\Rightarrow\; 4x-3y=0$$

A partir desta equação e da segunda equação do primeiro sistema linear, é possível determinar os valores de x e y resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ -x+y=-1 \end{cases}$$

Multiplicando-se a segunda equação deste sistema por 4 e somando as equações membro a membro, obtém-se $y=-4$:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -x + y = -1 \quad \times(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \;\;4x - 3y = 0 \\ \underline{-4x + 4y = -4} \end{cases} +$$

$$\boxed{y = -4}$$

Fazendo-se $y = -4$ em qualquer uma dessas equações, obtém-se $x = -3$. Por fim, os termos independentes apagados podem ser obtidos substituindo-se esses valores de x e y na primeira equação do primeiro sistema linear fornecido:

$$x - 2y \;=$$

$$-3 - 2 \cdot (-4) =$$

$$\boxed{5 =}$$

QUESTÃO 06

Uma moeda honesta foi lançada até que se observassem exatamente três resultados consecutivos iguais. A probabilidade de a moeda ter sido lançada exatamente cinco vezes é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{16}$

E) $\frac{1}{32}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 06: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Para que a moeda tenha sido lançada exatamente cinco vezes, é necessário que os resultados dos três últimos lançamentos tenham sido iguais e que não tenha havido três resultados consecutivos iguais antes. Assim, usando C para representar cara e K para representar coroa, conclui-se que, para que a moeda tenha sido lançada exatamente cinco vezes, é necessário que a sequência de resultados tenha sido:

CKCCC ou KKCCC ou KCKKK ou CCKKK

Como a moeda é honesta, a probabilidade de ter acontecido cada uma dessas sequências de resultados é igual a

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Logo, a probabilidade solicitada é:

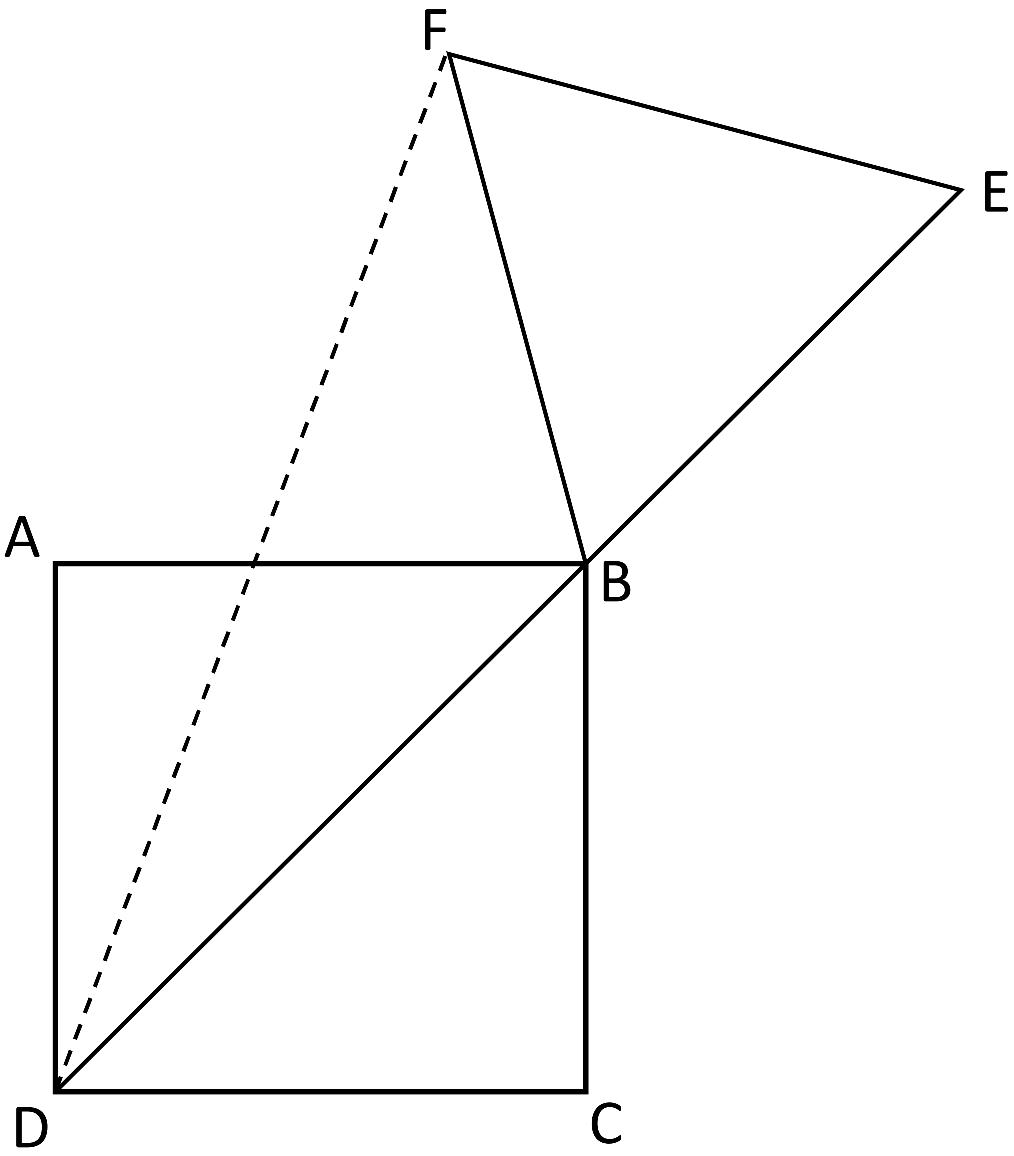
$$P = 4 \cdot p$$

$$P = 4 \cdot \frac{1}{32}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{8}}$$

QUESTÃO 07

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e BFE é um triângulo equilátero. Se ambos possuem lados de medida igual a 1 cm e os pontos D, B e E são colineares, então a medida de $\overline{DF}$, em cm, é:



A) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$

B) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

E) $\sqrt{6-\sqrt{3}}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 07: Alternativa A
RESOLUÇÃO

Para resolver esta questão, usaremos o fato de que a diagonal de um quadrado de lado de medida L tem comprimento

$$d = L\sqrt{2}$$

e que a altura de um triângulo equilátero de lado de medida L tem comprimento

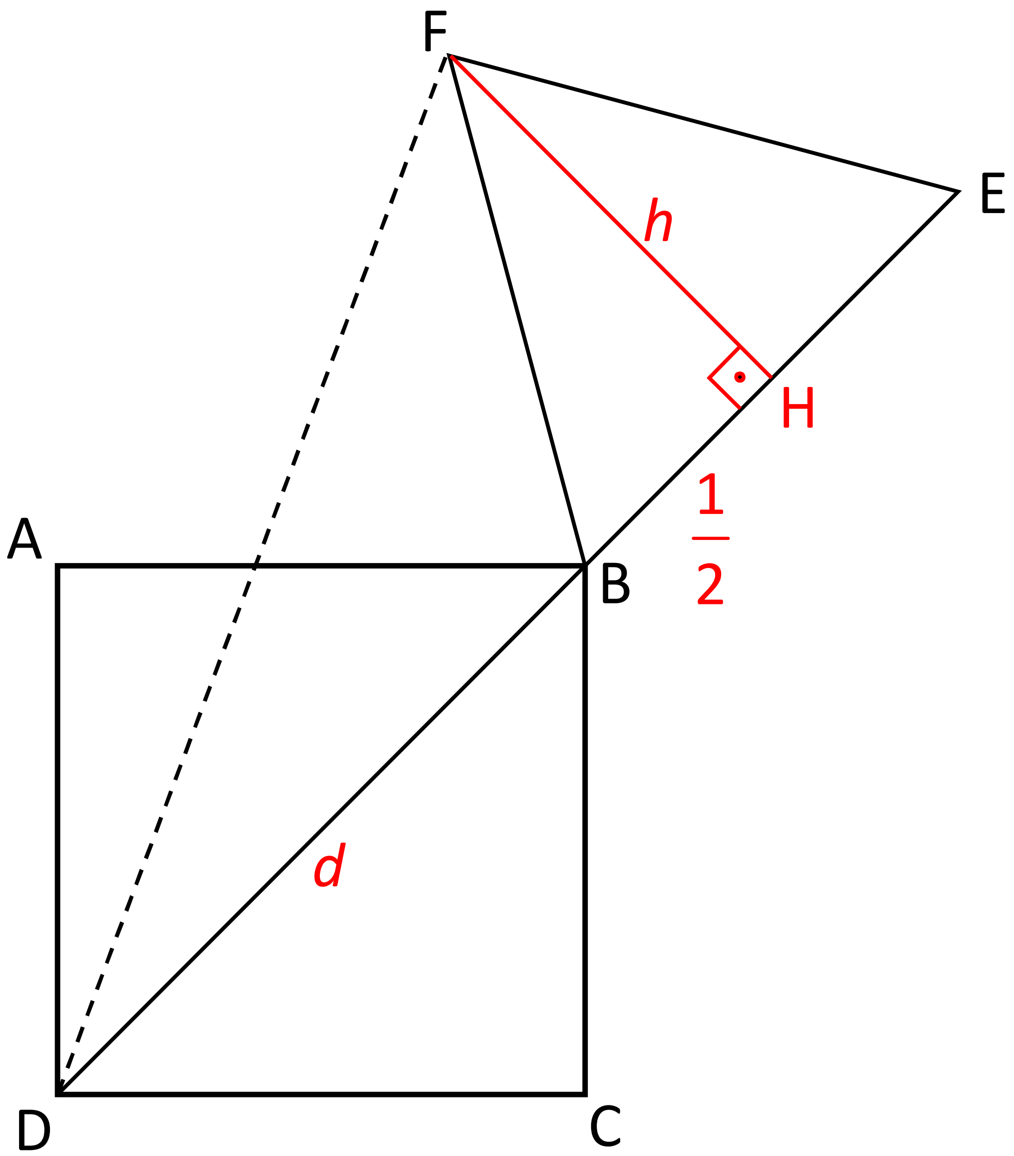
$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Ambas as relações podem ser obtidas facilmente a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras.

Nesta questão, tanto o quadrado quanto o triângulo equilátero envolvidos possuem lados de medida igual a 1 cm. Logo, a diagonal $\overline{BD}$ do quadrado ABCD e a altura $\overline{FH}$ do triângulo BEF medem, respectivamente,

$$d = \sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{e} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Como a altura de um triângulo equilátero divide sua base em duas partes de mesmo comprimento, tem-se $BH = \frac{1}{2}$ cm. Agora, observe a figura abaixo e note que o triângulo DHF é retângulo em H.



Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$DF^2 = DH^2 + FH^2$$

$$DF^2 = \left(d + \frac{1}{2}\right)^2 + h^2$$

$$DF^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$DF^2 = 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$DF^2 = 3 + \sqrt{2}$$

$$\boxed{DF = \sqrt{3 + \sqrt{2}}\ \text{cm}}$$

NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 08

Um professor de eletrônica de uma instituição federal orientou uma turma do último ano do curso de automação industrial na produção de dois tipos de robôs. Um tipo foi programado para dizer sempre verdade e o outro tipo foi programado para sempre mentir. Um professor de Matemática dessa instituição está avaliando um grupo de sete desses robôs produzidos pelos alunos – rotulados de Euler, Cardano, Pitágoras, Fermat, Aristóteles, Tales e Gauss – para determinar quantos, dentre os sete, são do tipo que sempre mentem. Para isso, o professor faz a seguinte pergunta a Euler:

– Você é do tipo mentiroso?

Euler responde, mas o professor, distraído, não ouve a resposta. Os robôs restantes fazem, então, as seguintes declarações:

- Cardano: Euler respondeu SIM.
- Pitágoras: Cardando acabou de mentir.
- Fermat: Pitágoras também mentiu.
- Aristóteles: Fermat mentiu.
- Tales: Aristóteles disse verdade.
- Gauss: Euler é do tipo mentiroso.

Mesmo sem ter prestado atenção à resposta de Euler, o professor de Matemática pode concluir corretamente que, naquele grupo de robôs:

A) Apenas Euler é do tipo mentiroso.

B) Há exatamente dois do tipo mentiroso: Cardano e Fermat.

C) Há exatamente dois do tipo mentiroso: Euler e Pitágoras.

D) Há exatamente três do tipo mentiroso: Cardano, Fermat e Gauss.

E) Há exatamente três do tipo mentiroso: dois deles são Cardano e Fermat e o terceiro ou é Euler ou é Gauss.

RESPOSTA DA QUESTÃO 08: Alternativa E
RESOLUÇÃO

Observe que, se Euler for do tipo programado para sempre mentir, então, ao ser questionado sobre ele ser do tipo mentiroso, ele deverá responder que NÃO pois, caso contrário, estaria dizendo a verdade.

Da mesma forma, se Euler for do tipo que sempre diz verdade, então, ao ser questionado sobre ele ser do tipo mentiroso, ele também deverá responder que NÃO pois, caso contrário, estaria mentindo.

Deste modo, perceba que, independentemente de Euler ser do tipo mentiroso ou não, a resposta dele à pergunta do professor é NÃO. Assim, é possível concluir que:

- Cardano mentiu.
- Pitágoras disse verdade.
- Fermat mentiu.

- Aristóteles disse verdade.
- Tales disse verdade.

Agora, note que não é possível determinar o tipo de robô que Euler e Gauss são. Mas é possível concluir que:

- Se Euler for do tipo mentiroso, então Gauss é do tipo que diz verdade.
- Se Euler for do tipo que diz verdade, então Gauss é do tipo mentiroso.

Desta forma, exatamente um dos dois é do tipo mentiroso. Logo, pode-se concluir corretamente que, naquele grupo de robôs, há exatamente três do tipo mentiroso: dois deles são Cardano e Fermat e o terceiro ou é Euler ou é Gauss.

QUESTÃO 09

Considere que AB é um número de dois algarismos, sendo A o algarismo das dezenas e B o algarismo das unidades. Sabendo que o tempo representado por AB dias é igual ao tempo representado por B semanas mais A dias, e que A possui uma quantidade ímpar de divisores inteiros positivos, pode-se concluir que A+B é igual a:

A) 5
B) 6
C) 8
D) 10
E) 15

RESPOSTA DA QUESTÃO 09: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Como AB é um número de dois algarismos, sendo A o algarismo das dezenas e B o algarismo das unidades, tem-se que AB dias é igual a $10 \cdot A + B$ dias. Além disso, o tempo representado por B semanas mais A dias é igual a $7 \cdot B + A$ dias. Como esses tempos são iguais, tem-se que:

$$10 \cdot A + B = 7 \cdot B + A$$
$$9 \cdot A = 6 \cdot B$$
$$\boxed{3 \cdot A = 2 \cdot B}$$

Como A e B são algarismos do sistema de numeração decimal, há exatamente três pares de valores que solucionam esta equação. São eles:

- $A = 2$ e $B = 3$;
- $A = 4$ e $B = 6$;
- $A = 6$ e $B = 9$.

Agora, note que:

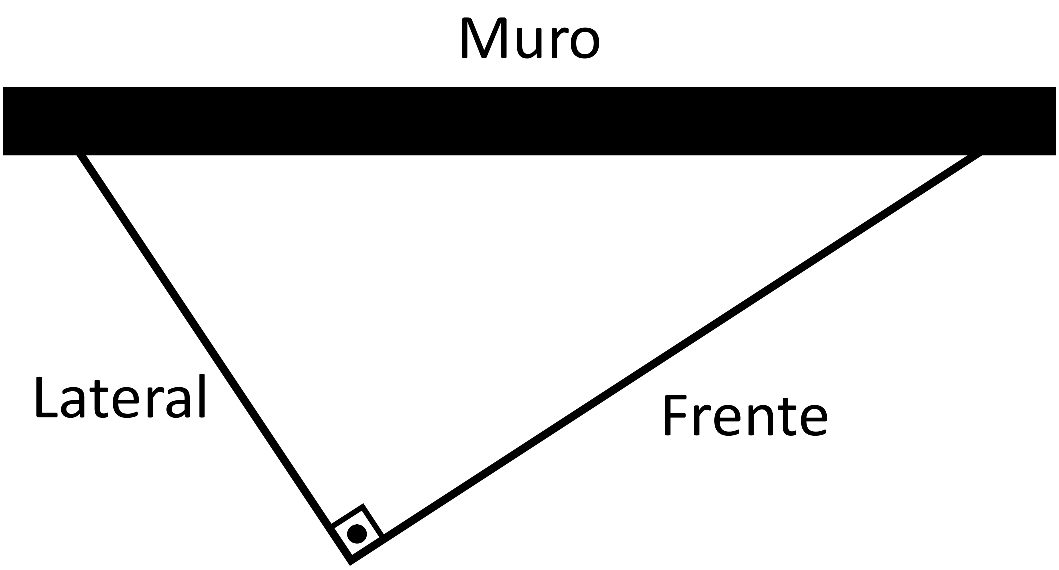
- O número 2 tem dois divisores inteiros positivos (1 e 2);
- O número 4 tem três divisores inteiros positivos (1, 2 e 4);
- O número 6 tem quatro divisores inteiros positivos (1, 2, 3 e 6);

Assim, como A possui uma quantidade ímpar de divisores inteiros positivos, pode-se concluir que $A = 4$ e $B = 6$. Desse modo:

$$A + B = 4 + 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A + B = 10}$$

QUESTÃO 10

João deseja delimitar uma área do seu terreno para servir como galinheiro, aproveitando um muro de 30 metros de comprimento e uma sobra de material de outro projeto, suficiente para construir 20 metros de cerca. Por motivos de logística, o galinheiro deverá ter a forma de um triangulo retângulo de modo que o muro contenha a sua hipotenusa, conforme a figura abaixo:



A sobra de material será utilizada apenas para construir a cerca da frente e da lateral, uma vez que o muro já servirá para completar a delimitação do galinheiro. Considerando que João delimitará a maior área possível com este material e que ele colocará, no máximo, três galinhas por metro quadrado, a quantidade máxima de galinhas que serão colocadas neste galinheiro é:

A) 50

B) 75

C) 100

D) 150

E) 300

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Seja x a medida, em metros, que João usará na cerca da frente deste galinheiro. Como o material que João possui é suficiente para construir 20 metros de cerca, tem-se que a cerca lateral deverá medir $20-x$ metros. Assim, como o galinheiro terá a forma de um triângulo retângulo, sua área, em função de x, será:

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(20-x)$$

$$\boxed{A(x)=-\frac{1}{2}x^2+10x}$$

A área máxima pode ser obtida calculando-se a ordenada do vértice desta função:

$$A_{Máxima} = y_V$$

$$A_{Máxima} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$A_{Máxima} = \frac{-\left(10^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$A_{Máxima} = \frac{-100}{-2}$$

$$\boxed{A_{Máxima} = 50\ m^2}$$

Por fim, como João colocará, no máximo, três galinhas por metro quadrado, a quantidade máxima de galinhas que serão colocadas neste galinheiro é igual a:

$$50 \cdot 3 = \boxed{150}$$

QUESTÃO 11

Seja N um número natural tal que:

$$N = 2023^2 - 2022^2 + 2021^2 - 2020^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$$

O resto da divisão de N por 5 é:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

RESPOSTA DA QUESTÃO 11: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Para resolver esta questão, usaremos o fato de que, para todo *a* e *b* reais, tem-se:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

Assim:

$$N = \underbrace{2023^2 - 2022^2} + \underbrace{2021^2 - 2020^2} + \ldots + \underbrace{3^2 - 2^2} + 1^2$$

$$N = (2023+2022)\cdot 1 + (2021+2020)\cdot 1 + \ldots$$
$$\ldots + (3+2)\cdot 1 + 1$$

$$N = 2023 + 2022 + 2021 + 2020 + \ldots + 3 + 2 + 1 + 0$$

Pela última equação, note que N pode ser escrito como a soma de 2024 parcelas e que a soma da primeira com a última $(2023+0)$ é igual à soma da segunda com a penúltima $(2022+1)$, que é igual à soma da terceira com a antepenúltima

$(2021+2)$ e assim por diante. Isso nos dá um total de $\dfrac{2024}{2}=1012$ somas parciais iguais e nos permite concluir que:

$$N = (2023+0)\cdot 1012 = 2023\cdot 1012$$

Efetuando esta multiplicação, conclui-se que N é um número cujo algarismo das unidades é 6, deixando resto 1 quando dividido por 5.

QUESTÃO 12

Uma caixa contém n bolas, numeradas de 1 a n, com $n \geq 4$. Todas são idênticas, exceto pelos números nelas estampados. Se quatro bolas são extraídas da caixa ao mesmo tempo, de maneira aleatória, a probabilidade de que elas contenham quatro números consecutivos é, em função de n, igual a:

A) $\dfrac{8}{n^3 - 3n^2 - 2n}$

B) $\dfrac{12}{n^3 - 3n^2 + 2n}$

C) $\dfrac{24}{n^3 - 3n^2 + 2n}$

D) $\dfrac{12}{n^3 - 2n^2 - 3n}$

E) $\dfrac{20}{n^3 - 2n^2 - 3n}$

RESPOSTA DA QUESTÃO 12: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Como cada bola possui um número diferente estampado em sua superfície, há exatamente:

$$C_{n,4} = \frac{n!}{4! \times (n-4)!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cancel{(n-4)!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times \cancel{(n-4)!}}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}$$

combinações possíveis de extração simultânea de 4 bolas da caixa.

De todas essas combinações, exatamente $(n-3)$ apresentam quatro números consecutivos. São elas:

$$(1,2,3,4)\quad(2,3,4,5)\quad(3,4,5,6)$$

$$(4,5,6,7)\quad(5,6,7,8)\quad(6,7,8,9)$$

$$\ldots\quad(n-3,n-2,n-1,n)$$

Logo, se quatro bolas são extraídas da caixa ao mesmo tempo, de maneira aleatória, a probabilidade de que elas contenham quatro números consecutivos é, em função de n, igual a:

$$P=\frac{(n-3)}{\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}}$$

$$P=\frac{24\cdot\cancel{(n-3)}}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cancel{(n-3)}}$$

$$\boxed{P=\frac{24}{n^3-3n^2+2n}}$$

QUESTÃO 13

Vinte e três números reais são escritos em ordem crescente. O número central é igual à média aritmética simples dos outros vinte e dois números, além de ser 5 unidades maior do que o número anterior e 31 unidades menor do que o posterior. A média aritmética simples dos 13 menores números é 20 e a média aritmética simples dos 13 maiores é 80. Então, o número central é:

A) 49
B) 49,5
C) 50
D) 50,5
E) 51

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{23})$ a sequência dos vinte e três números escritos em ordem crescente. Chamando de x o número central (a_{12}), pode-se concluir, pelas informações do enunciado, que o número anterior (a_{11}) é igual a $x-5$ e que o posterior (a_{13}) é igual a $x+31$.

$$\left(\ \underbrace{a_1,\ \ldots,\ a_{10}}_{\text{Soma } S_1},\ x-5,\ x,\ x+31,\ \underbrace{a_{14},\ \ldots,\ a_{23}}_{\text{Soma } S_2}\ \right)$$

Seja S_1 a soma dos dez primeiros termos da sequência e S_2 a soma dos dez últimos. Como o número central é igual à média aritmética simples dos outros vinte e dois números, tem-se que:

$$x = \frac{S_1 + (x-5) + (x+31) + S_2}{22}$$

$$22x = S_1 + 2x + 26 + S_2$$

$$\boxed{20x = S_1 + S_2 + 26} \qquad (1)$$

Como a média aritmética simples dos 13 menores números é 20, tem-se que:

$$20 = \frac{S_1 + (x-5) + x + (x+31)}{13}$$

$$260 = S_1 + 3x + 26$$

$$\boxed{S_1 = 234 - 3x} \qquad (2)$$

Agora, como a média aritmética simples dos 13 maiores números é 80, tem-se que:

$$80 = \frac{(x-5) + x + (x+31) + S_2}{13}$$

$$1040 = S_2 + 3x + 26$$

$$\boxed{S_2 = 1014 - 3x} \qquad (3)$$

Logo, por (1), (2) e (3), tem-se que:

$$20x = S_1 + S_2 + 26$$

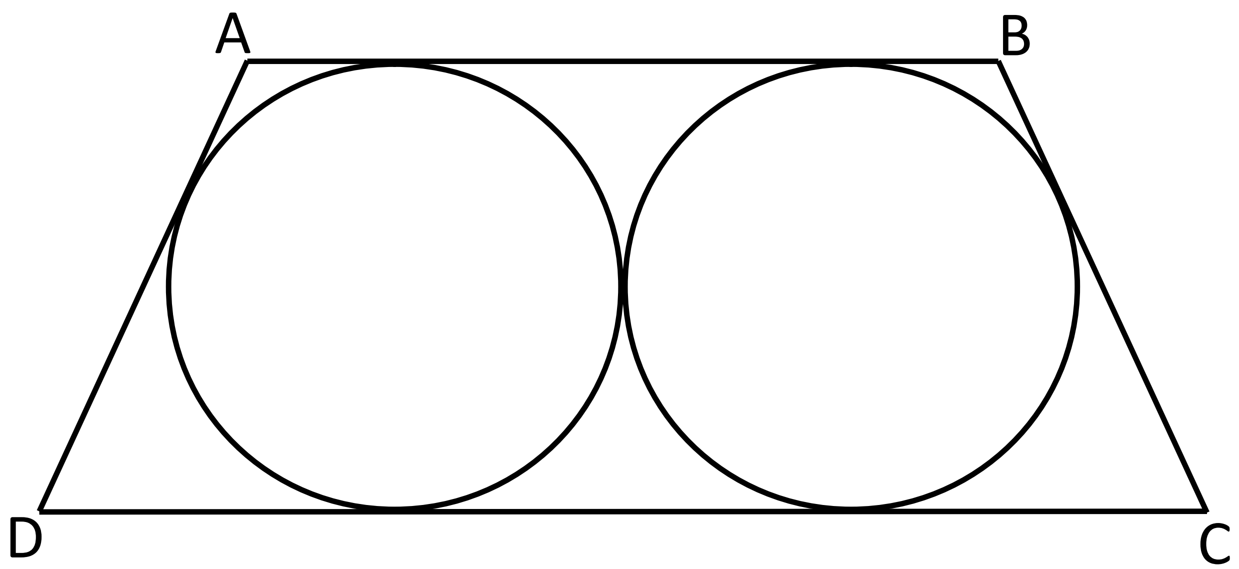
$$20x = \left(234 - 3x\right) + \left(1014 - 3x\right) + 26$$

$$26x = 1274$$

$$\boxed{x = 49}$$

QUESTÃO 14

Na figura abaixo, ABCD é um trapézio isósceles, com $AD = BC = 5$ cm e com a base maior $\overline{CD}$ medindo 6 cm a mais do que a base menor $\overline{AB}$. Duas circunferências, tangentes entre si, estão no interior deste trapézio, de modo que a circunferência da esquerda tangencia os lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ e a circunferência da direita tangencia os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. A medida dos raios das circunferências e a medida de $\overline{AB}$ são, respectivamente, em cm, iguais a:

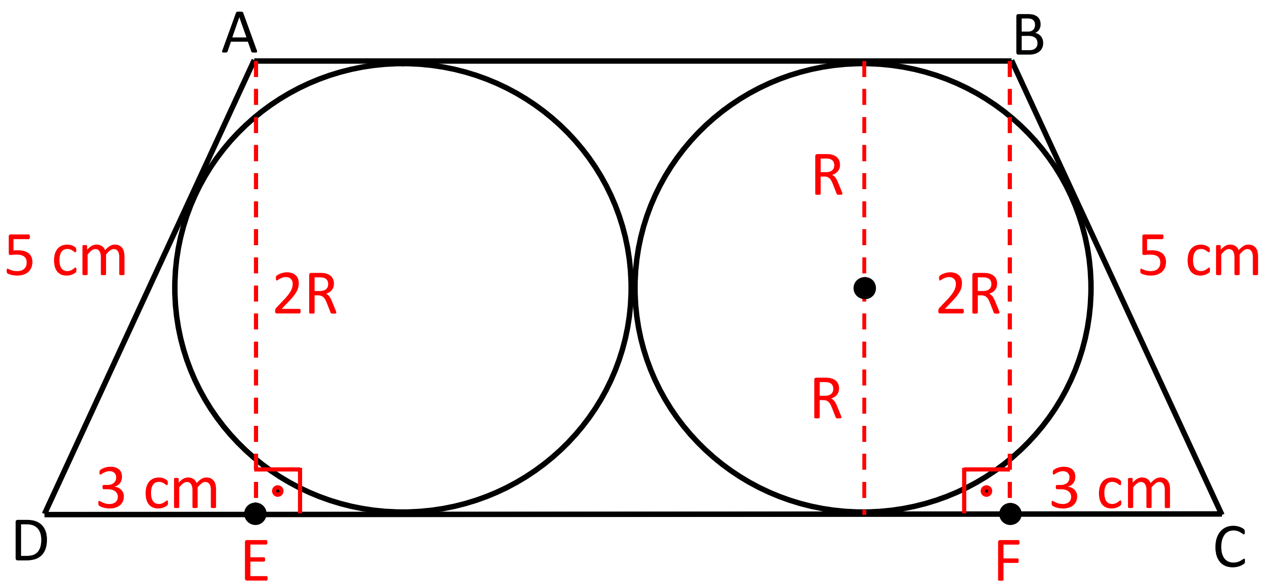


A) 2 e 6
B) 4 e 6
C) 2 e 12
D) 4 e 12
E) 6 e 12

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Como as circunferências tangenciam as duas bases do trapézio, pode-se afirmar que, se R é a medida dos raios das circunferências, então a altura do trapézio mede 2R. A figura abaixo ilustra esse fato e exibe os pontos E e F, projeções ortogonais de A e B sobre $\overline{CD}$.

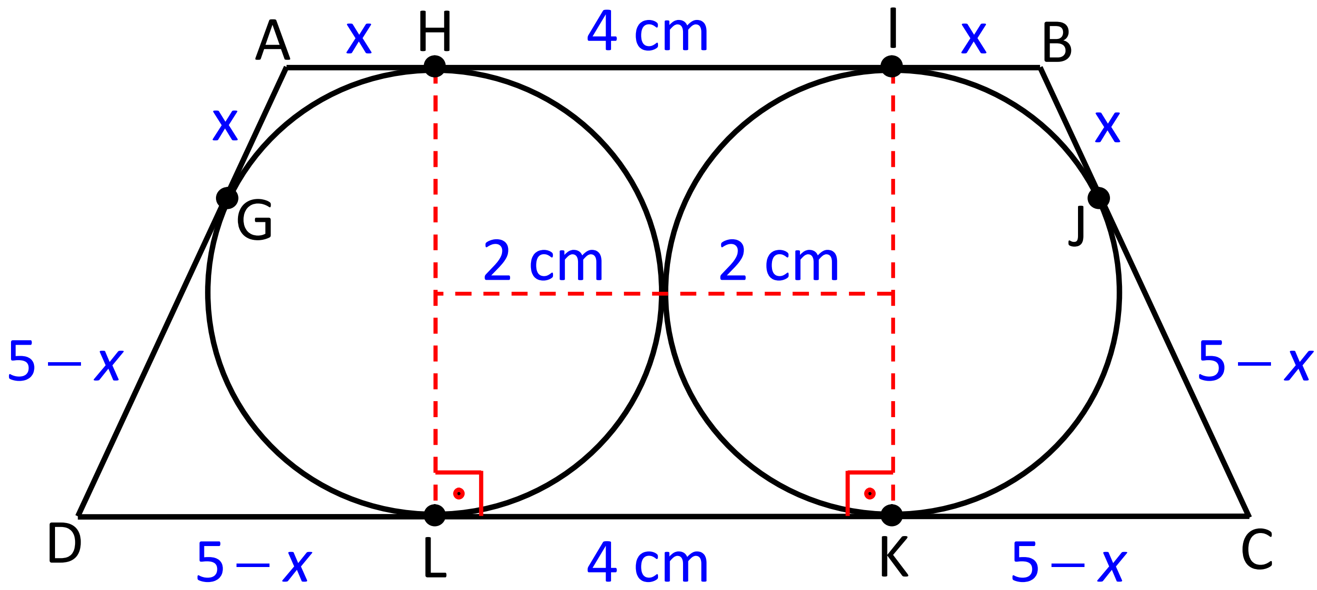


Como a base maior $\overline{CD}$ mede 6 cm a mais do que a base menor $\overline{AB}$ e o trapézio é isósceles, então, por simetria, tem-se $DE = FC = \frac{6}{2} = 3$ cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADE obtém-se:

$$(2R)^2 + 3^2 = 5^2$$
$$4R^2 = 16$$
$$R^2 = 4$$
$$\boxed{R = 2\text{ cm}}$$

Agora, sejam G, H, I, J, K e L os pontos de tangência entre as circunferências e o trapézio, conforme a figura abaixo. Sendo $AG = x$, tem-se $DG = 5 - x$. Como $\overline{AG}$ e $\overline{AH}$ são dois segmentos tangentes a uma mesma circunferência e com extremidade exterior comum, então eles são congruentes. Logo, $AH = AG = x$. De maneira análoga, conclui-se que $DL = DG = 5 - x$. Por simetria, tem-se $BI = BJ = x$ e $CJ = CK = 5 - x$. Além disso, tem-se $HI = KL = 2R = 4\text{ cm}$.



Como a base maior $\overline{CD}$ mede 6 cm a mais do que a base menor $\overline{AB}$, então:

$$AB + 6 = CD$$
$$x + 4 + x + 6 = (5 - x) + 4 + (5 - x)$$
$$2x + 10 = 14 - 2x$$
$$4x = 4$$
$$\boxed{x = 1 \text{ cm}}$$

Logo, a medida de $\overline{AB}$ é:

$$AB = x + 4 + x$$
$$AB = 1 + 4 + 1$$
$$\boxed{AB = 6 \text{ cm}}$$

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 15

Observe a sequência abaixo, formada por exatamente 6069 números:

$$\left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, \ldots, 2022, 2023, \\ 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2022^2, 2023^2, \\ \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2022}, \sqrt{2023} \end{array}\right)$$

Reordenando os elementos dessa sequência de modo a transformá-la em uma sequência não decrescente, obtém-se, como elemento central, o número:

A) 980
B) 981
C) 982
D) 983
E) 984

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Seja $S=(a_1, a_2, a_3, ..., a_{6069})$ a sequência não decrescente desses 6069 números. O elemento central dessa sequência ocupa a posição:

$$\frac{1+6069}{2}=\frac{6070}{2}=3035$$

Para descobrir qual é o elemento central (a_{3035}), precisamos, antes, determinar quais são os 3034 elementos menores ou iguais a ele. Para isso, note, primeiramente, que todos os números dados em raízes $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{2022}, \sqrt{2023}\right)$ são menores do que $45=\sqrt{2025}$. Deste modo:

- Os 45 números de 1 a 45 são menores ou iguais a 45.
- Os 6 números de 1^2 a 6^2 são menores do que 45.
- Os 2023 números de $\sqrt{1}$ a $\sqrt{2023}$ são menores do que 45.

Assim, já se pode concluir que o elemento de S na posição $45+6+2023=2074$ é o número 45, ou seja, que $a_{2074}=45$.

$$S=\left(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{2073},\ 45,\ a_{2075},\ \ldots\right)$$

O elemento que queremos determinar é a_{3035}, que está $3035-2074=961$ posições a frente de a_{2074}. Observando que $961=31^2$, tem-se que:

- Há $961-45=916$ números inteiros de 46 a 961.
- Há $31-6=25$ quadrados perfeitos de 7^2 a $31^2=961$.

Assim, no total, há $916+25=941$ elementos na sequência S que variam de 46 a 961. Deste modo, pode-se concluir que o elemento na posição $2074+941=3015$ vale 961. Logo, tem-se $a_{3015}=961$ ou $a_{3015}=31^2$.

$$S=\left(a_1,\ \ldots,\ a_{2073},\ 45,\ a_{2075},\ \ldots,\ a_{3013},\ 961,\ 31^2,\ \ldots\right)$$

Novamente, lembremos que o elemento que queremos determinar é a_{3035}, que está $3035-3015=20$ posições a frente de a_{3015}.

Portanto, como $32^2=1024>981$, tem-se:

- $a_{3016}=962$
- $a_{3017}=963$
- $a_{3018}=964$
- ...
- $\boxed{a_{3035}=961+20=981}$

QUESTÃO 16

Um número inteiro é divisível por 11 se, e somente se, a soma dos seus algarismos de ordem par, subtraída da soma dos seus algarismos de ordem ímpar, resultar em um número divisível por 11. Nesta afirmação, a ordem de um algarismo está relacionada à posição que ele ocupa no número, da direita para a esquerda. Assim, os algarismos de ordem ímpar são os da unidade, centena, dezena de milhar e assim por diante, enquanto os de ordem par são os da dezena, milhar, centena de milhar e assim por diante. Portanto, pode-se afirmar que o número 1364 é divisível por 11 pois $(4+3)-(6+1)=0$ é divisível por 11. Já o número 28519 não é divisível por 11 pois $(9+5+2)-(1+8)=7$ não é divisível por 11. Desta forma, utilizando apenas os algarismos 0 e 1, quantos números diferentes podem ser escritos de modo que eles sejam divisíveis por 11 e contenham exatamente 11 algarismos?

A) 126

B) 205

C) 210

D) 255

E) 265

RESPOSTA DA QUESTÃO 16: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Para que um número contenha exatamente 11 algarismos, é necessário que o primeiro deles (lido da esquerda para a direita) seja diferente de zero. Assim, como a ideia é utilizar apenas os algarismos 0 e 1, já se tem definido que o primeiro algarismo do número deve ser 1.

1 __ __ __ __ __ __ __ __ __ __

Agora, para que o número seja divisível por 11, é necessário que a soma dos seus algarismos de ordem par, subtraída da soma dos seus algarismos de ordem ímpar, resulte em um número divisível por 11. Utilizando apenas os algarismos 0 e 1, a maior soma possível dos algarismos de ordem par é 5 e a maior soma possível dos algarismos de ordem ímpar é 6, de modo que, para garantir a divisibilidade por 11, será necessário que a soma dos algarismos de ordem par, subtraída da soma dos algarismos de ordem ímpar, resulte em zero.

Para isso, a quantidade de algarismos 1 de ordem ímpar deve ser igual à quantidade de algarismos 1 de ordem par.

Como já está definido que o primeiro algarismo do número é 1, resta-nos apenas escrever os outros 10 (5 de ordem ímpar e 5 de ordem par). Para garantir a divisibilidade por 11, podemos escrever:

- 4 algarismos 1 de ordem ímpar e 5 de ordem par, escrevendo zero nos demais. Isso pode ser feito de

$$C_{5,4} \cdot C_{5,5} = \frac{5!}{4! \times 1!} \cdot \frac{5!}{5! \times 0!} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ maneiras}$$

- 3 algarismos 1 de ordem ímpar e 4 de ordem par, escrevendo zero nos demais. Isso pode ser feito de

$$C_{5,3} \cdot C_{5,4} = \frac{5!}{3! \times 2!} \cdot \frac{5!}{4! \times 1!} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ maneiras}$$

- 2 algarismos 1 de ordem ímpar e 3 de ordem par, escrevendo zero nos demais. Isso pode ser feito de

$$C_{5,2} \cdot C_{5,3} = \frac{5!}{2! \times 3!} \cdot \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ maneiras}$$

- 1 algarismo 1 de ordem ímpar e 2 de ordem par, escrevendo zero nos demais. Isso pode ser feito de

$$C_{5,1} \cdot C_{5,2} = \frac{5!}{1! \times 4!} \cdot \frac{5!}{2! \times 3!} = 5 \cdot 10 = 50 \text{ maneiras}$$

- 0 algarismo 1 de ordem ímpar e 1 de ordem par, escrevendo zero nos demais. Isso pode ser feito de

$$C_{5,0} \cdot C_{5,1} = \frac{5!}{0! \times 5!} \cdot \frac{5!}{1! \times 4!} = 1 \cdot 5 = 5 \text{ maneiras}$$

Logo, utilizando apenas os algarismos 0 e 1, podem ser escritos

$$5+50+100+50+5=210$$

números divisíveis por 11 com exatamente 11 algarismos.

QUESTÃO 17

O Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que, para todo número natural n maior do que 1, existem números primos $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ e, também, números naturais não nulos α_1, α_2, α_3, ..., α_k, com k inteiro positivo, tais que:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Dizemos que o número n, escrito nessa forma, está decomposto como produto de potências cujas bases são números primos distintos dois a dois. Além disso, é possível provar que a soma S dos divisores naturais de um número natural $n > 1$ pode ser calculada por:

$$S = \left(p_1^{0} + p_1^{1} + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right) \times \left(p_2^{0} + p_2^{1} + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right) \times$$
$$\times \ldots \times \left(p_k^{0} + p_k^{1} + \ldots + p_k^{\alpha_k}\right)$$

Assim, por exemplo, a soma dos divisores naturais do número $2023 = 7 \cdot 17^2$ é:

$$S = \left(7^0 + 7^1\right)\left(17^0 + 17^1 + 17^2\right) =$$
$$= \left(1 + 7\right)\left(1 + 17 + 289\right) = 8 \cdot 307 = 2456$$

Munido dessas informações, e sabendo que a soma de todos os divisores naturais do inteiro positivo M é igual a 961, pode-se afirmar que a soma de todos os algarismos de M é igual a:

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

RESPOSTA DA QUESTÃO 17: Alternativa A

RESOLUÇÃO

Primeiramente, observe que $961 = 31 \times 31$. Como este número representa a soma de todos os divisores naturais do inteiro positivo M, então:

- Ou tem-se $M = {p_1}^{\alpha_1}$ e, assim, o número 961 pode ser obtido a partir do seguinte cálculo:

$$961 = \left({p_1}^0 + {p_1}^1 + \ldots + {p_1}^{\alpha_1}\right)$$

- Ou tem-se $M = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2}$ e, assim, o número 961 pode ser obtido a partir do seguinte cálculo:

$$961 = \left({p_1}^0 + \ldots + {p_1}^{\alpha_1}\right) \times \left({p_2}^0 + \ldots + {p_2}^{\alpha_2}\right)$$

$$\text{sendo } \begin{cases} {p_1}^0 + \ldots + {p_1}^{\alpha_1} = 31 \\ {p_2}^0 + \ldots + {p_2}^{\alpha_2} = 31 \end{cases}$$

A primeira opção é impossível, já que:

- p_1 não pode ser 2, pois:

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^8 < 961 < 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^9$$

- p_1 não pode ser 3, pois:

$$3^0 + 3^1 + \ldots + 3^5 < 961 < 3^0 + 3^1 + \ldots + 3^6$$

- p_1 não pode ser 5, pois:

$$5^0 + 5^1 + \ldots + 5^4 < 961 < 5^0 + 5^1 + \ldots + 5^5$$

- p_1 não pode ser 7, pois:

$$7^0 + 7^2 + 7^3 < 961 < 7^0 + 7^2 + 7^3 + 7^4$$

- E, assim por diante, é possível verificar que 961 não pode ser obtido como a soma de potências consecutivas de um número primo.

Para que a segunda opção seja possível, é necessário que existam pelo menos dois números primos distintos cuja soma de potências consecutivas possa resultar em 31. É possível verificar que isso só acontece com os primos 2 e 5:

- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$
- $5^0 + 5^1 + 5^2 = 31$

Logo, deve-se ter $M = 2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$, cuja soma de todos os algarismos é igual a $4 + 0 + 0 = 4$.

QUESTÃO 18

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de domínio $D \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição:

$$x + 2f\left(\frac{x+2021}{x-1}\right) = -1719 - f(x),$$

para $x \neq 1$. O valor de $f(2023)$ é:

A) 1

B) 10

C) 100

D) 1000

E) 2023

RESPOSTA DA QUESTÃO 18: Alternativa C

RESOLUÇÃO

Fazendo $x=2$ e $x=2023$ na condição dada, obtém-se:

$$\begin{cases} 2+2f\left(\dfrac{2+2021}{2-1}\right)=-1719-f(2) \\ 2023+2f\left(\dfrac{2023+2021}{2023-1}\right)=-1719-f(2023) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+2f(2023)=-1719-f(2) \\ 2023+2f(2)=-1719-f(2023) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2)+2f(2023)=-1721 & \times(2) \\ 2f(2)+f(2023)=-3742 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2f(2)+4f(2023)=-3442 \\ 2f(2)+f(2023)=-3742 \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, a última equação da penúltima, obtém-se:

$$3f\left(2023\right)=300$$

$$\boxed{f\left(2023\right)=100}$$

QUESTÃO 19

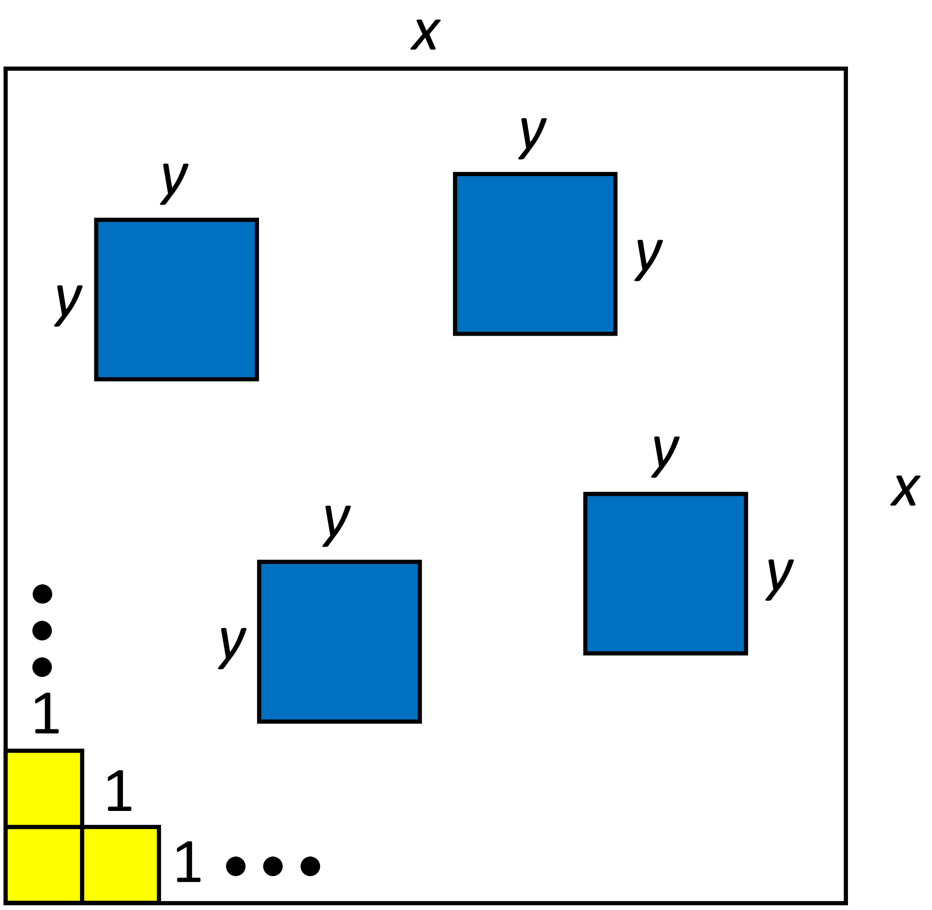
Um quadrado foi dividido em exatamente 64 quadrados menores, todos com lados de medidas inteiras em centímetros. Nesta divisão, há exatamente 60 quadrados amarelos, com 1 cm^2 de área cada, e 4 quadrados congruentes azuis, com mais do que 1 cm^2 de área cada. O perímetro de um quadrado azul é, em cm, um número:

A) Múltiplo de 6.
B) Múltiplo de 7.
C) Múltiplo de 8.
D) Múltiplo de 9.
E) Múltiplo de 10.

RESPOSTA DA QUESTÃO 19: Alternativa B

RESOLUÇÃO

Sejam x e $y > 1$ as medidas, em cm, dos lados do quadrado que foi dividido e dos lados dos quadrados azuis, respectivamente.



Pelas informações fornecidas, tem-se que a área do quadrado que foi dividido é igual à soma das áreas dos 60 quadrados amarelos com as áreas dos 4 quadrados azuis, ou seja:

$$A_{\text{Quadrado que foi dividido}} = 60 \cdot A_{\text{Amarelo}} + 4 \cdot A_{\text{Azul}}$$

$$x^2 = 60 \cdot 1^1 + 4 \cdot y^2$$

$$x^2 = 4y^2 + 60$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$x^2 - 4y^2 = 60$$

$$(x+2y)\cdot(x-2y) = 60$$

Pelas informações do enunciado, y é um número inteiro positivo. Consequentemente, como os lados do quadrado que foi dividido é resultado da soma de medidas inteiras, tem-se que x também é um número inteiro positivo. Observe, então, que $(x+2y)$ é maior do que $(x-2y)$ e que ambas as expressões representam números inteiros. Agora, escrevendo 60 como o produto de dois números inteiros positivos, obedecendo a ordem do maior para o menor, tem-se:

$$\boxed{60 = 60\cdot 1 = 30\cdot 2 = 20\cdot 3 = 15\cdot 4 = 12\cdot 5 = 10\cdot 6}$$

Assim, para descobrir os valores de x e y, basta resolver os sistemas do tipo:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x - 2y = b \end{cases}$$

sendo a e b números inteiros tais que $a \cdot b = 60$, com $a > b$. Note, então, que há 6 possibilidades, pois pode-se ter:

$$\boxed{\begin{matrix} a = 60 \\ b = 1 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a = 30 \\ b = 2 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a = 20 \\ b = 3 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a = 15 \\ b = 4 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a = 12 \\ b = 5 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} a = 10 \\ b = 6 \end{matrix}}$$

Independentemente dos valores de a e b, somando as equações do sistema membro a membro e dividindo o resultado por 2, obtém-se:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Analogamente, subtraindo as equações do sistema membro a membro e dividindo o resultado por 4, obtém-se:

$$y = \frac{a-b}{4}$$

Portanto, $a+b$ deve ser divisível por 2 e $a-b$ deve ser divisível por 4, já que x e y são inteiros. Das possibilidades que se tem, isso só é possível com $a=30$ e $b=2$, obtendo $x=16$ e $y=7$, e com $a=10$ e $b=6$, obtendo $x=8$ e $y=1$. Como, pelo enunciado, tem-se $y>1$, conclui-se que $x=16$ e $y=7$.

Assim, os lados dos quadrados azuis medem 7 cm e, portanto, cada quadrado azul tem $7 \cdot 4 = 28$ cm de perímetro, um múltiplo de 7.

QUESTÃO 20

Dentre os primeiros 23 números naturais não nulos, Luana deve escolher 5 de maneira aleatória e colocá-los em ordem crescente, formando uma sequência de 5 números que usará em um jogo da escola. Feita a escolha e o ordenamento, a probabilidade de que o número 11 apareça como o elemento central da sequência é:

A) Menor do que 2%.
B) Maior do que 2% e menor do que 4%.
C) Maior do que 4% e menor do que 6%.
D) Maior do que 6% e menor do que 8%.
E) Maior do que 8% e menor do que 10%.

RESPOSTA DA QUESTÃO 20: Alternativa E

RESOLUÇÃO

O total de escolhas que Luana pode fazer é igual à quantidade de combinações de 23 elementos tomados 5 a 5, ou seja:

$$C_{23,5} = \frac{23!}{5! \times (23-5)!}$$

$$= \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{5 \cdot 4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times \cancel{18!}}$$

$$= 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 19$$

Agora, para que o número 11 seja o elemento central da sequência, é necessário que, além de escolher o número 11, ela também escolha dois números menores do que 11 e dois números maiores do que 11. Isso pode ser feito de:

$$\underbrace{C_{10,2}}_{\text{Escolher dois números menores do que 11}} \times \underbrace{1}_{\text{Escolher o número 11}} \times \underbrace{C_{12,2}}_{\text{Escolher dois números maiores do que 11}}$$

$$= \frac{10!}{2! \times 8!} \cdot \frac{12!}{2! \times 10!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2 \times \cancel{10!}}$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 11 \text{ maneiras}$$

Logo, feita a escolha e o ordenamento, a probabilidade de que o número 11 apareça como o elemento central da sequência é:

$$P = \frac{5 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cancel{11}}{23 \cdot \cancel{11} \cdot 7 \cdot 19}$$

$$P = \frac{270}{3059}$$

$$P \cong 0{,}088$$

$$\boxed{P \cong 8{,}8\%}$$

QUESTÃO 21

Considere uma malha quadriculada formada por 56 quadradinhos de área igual a $1\,cm^2$ cada, conforme as figuras abaixo. A Figura 1 destaca um hexágono de área A_1 e a Figura 2 destaca um hexágono de área A_2.

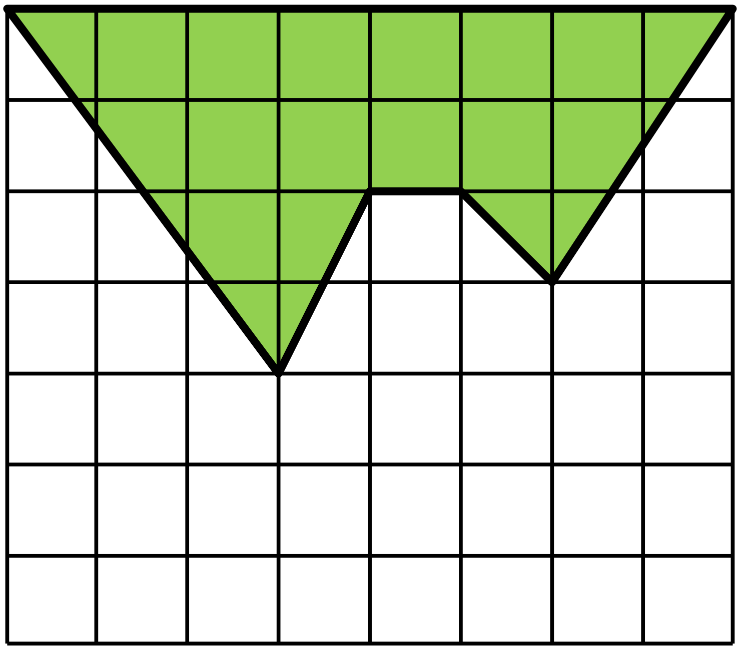


Figura 1

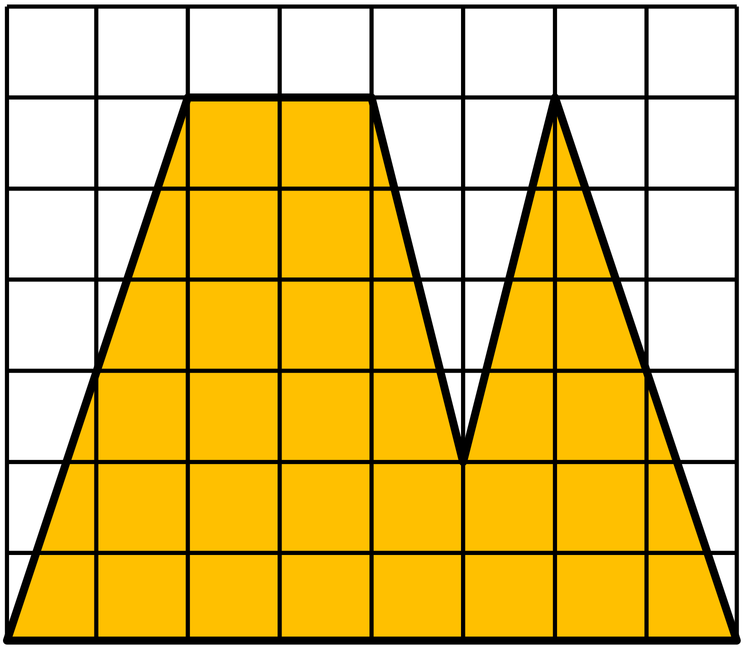


Figura 2

A região hachurada da Figura 3, abaixo, refere-se à intersecção dos hexágonos destacados nas Figuras 1 e 2 e possui área total igual a A_3, enquanto a região pintada de cinza refere-se ao complementar da união dos dois hexágonos destacados nas Figuras 1 e 2 em relação à área total da malha quadriculada, possuindo área total igual a A_4.

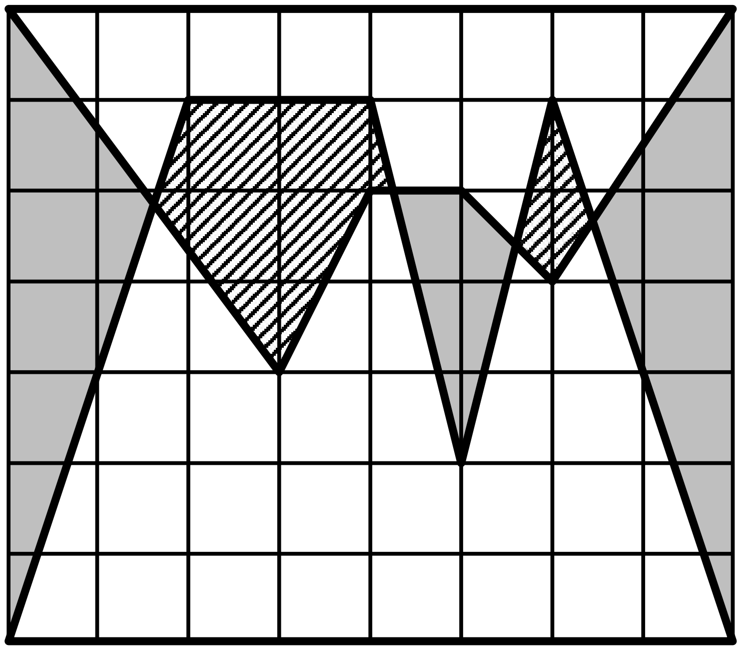


Figura 3

Deste modo, o valor de $4A_1 - 2A_2 - 6A_3 + 6A_4$ é:

A) $45{,}5\ cm^2$

B) $46{,}0\ cm^2$

C) $46{,}5\ cm^2$

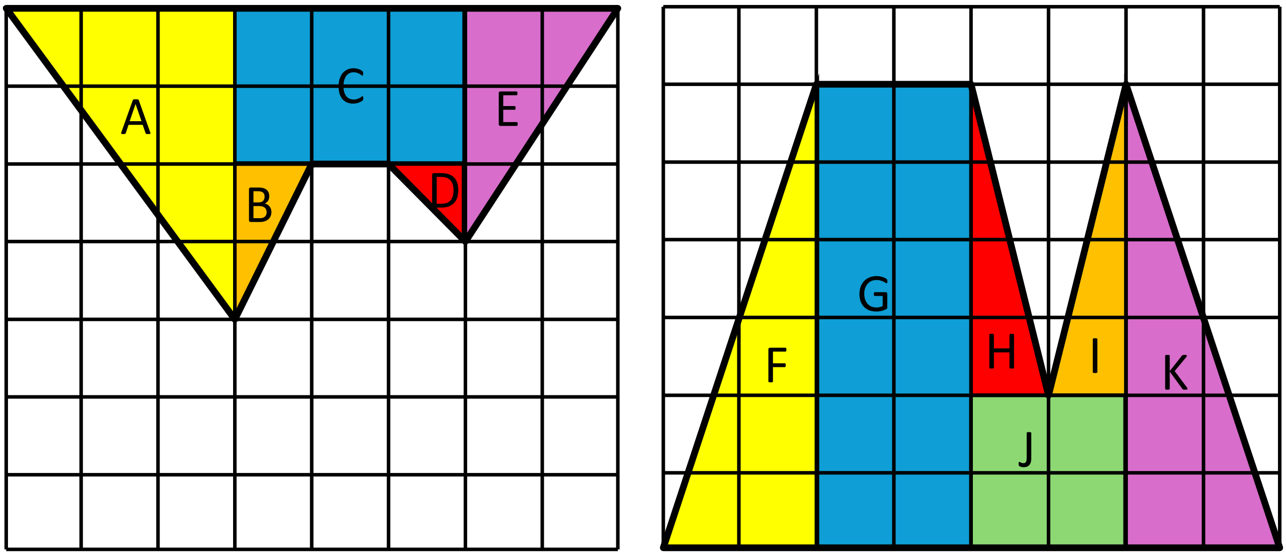
D) $47{,}0\ cm^2$

E) $47{,}5\ cm^2$

RESPOSTA DA QUESTÃO 21: Alternativa D

RESOLUÇÃO

Os hexágonos destacados nas Figuras 1 e 2 podem ser divididos em triângulos e retângulos, conforme abaixo, para facilitar os cálculos de suas áreas.



Desse modo, tem-se:

$$A_1 = A + B + C + D + E$$

$$A_1 = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + 3 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$A_1 = 6 + 1 + 6 + 0,5 + 3$$

$$\boxed{A_1 = 16,5\ \text{cm}^2}$$

$$A_2 = F + G + H + I + J + K$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 6}{2} + 2 \cdot 6 + \frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2} + 2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 6}{2}$$

$$A_2 = 6 + 12 + 2 + 2 + 4 + 6$$

$$\boxed{A_2 = 32\ \text{cm}^2}$$

Sobrepondo-se estas figuras, haverá uma área A_3 de intersecção dos hexágonos destacados (hachurada na Figura 3) e uma área A_4 da malha não ocupada por hexágono algum (em cinza na Figura 3). Assim, pode-se afirmar que:

$$A_{\text{Malha Quadriculada}} = A_1 + A_2 + A_4 - A_3$$

$$56 = 16{,}5 + 32 + A_4 - A_3$$

$$\boxed{A_4 - A_3 = 7{,}5}$$

Logo:

$$4A_1 - 2A_2 - 6A_3 + 6A_4 =$$

$$= 4 \cdot 16{,}5 - 2 \cdot 32 + 6 \cdot \left(A_4 - A_3\right)$$

$$= 66 - 64 + 6 \cdot 7{,}5$$

$$= 2 + 45$$

$$= 47 \text{ cm}^2$$