OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

OMIF 2026

Resolução Comentada da Prova da 2ª Fase

QUESTÃO 01

Em um jogo de tabuleiro, cada jogador recebe um dispositivo que determina a distância, em centímetros, que sua peça deve avançar em cada rodada. Antes de o jogo começar, cada jogador escolhe um número racional de 0 a 12 e o digita no dispositivo. Esse número fica exibido no visor e serve como entrada inicial.

A partir daí, em cada rodada, os jogadores pressionam uma tecla do dispositivo que transforma o número exibido no seu visor. O valor resultante dessa transformação indica a distância que o jogador deverá percorrer naquela rodada, além de servir também como entrada para a rodada seguinte.

Os jogadores não conhecem a regra usada pelo dispositivo, mas, quando o visor mostra o número x, a tecla o transforma em y, sendo:

$$y = |2x - 12| \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = \begin{cases} -2x + 12\,, & \text{se } 0 \le x < 6 \\ 2x - 12\,, & \text{se } 6 \le x \le 12 \end{cases}$$

Por exemplo, se o visor do dispositivo mostra o número 2,5, o jogador verá o número 7 após pressionar a tecla uma vez. Ao pressionar a tecla novamente, o visor passará a mostrar o número 2. A diversão do jogo está justamente em tentar descobrir o comportamento do dispositivo e prever o que acontecerá nas rodadas seguintes.

a) (3 pontos) Se um jogador escolher o número 2 para começar, quais serão os números exibidos no visor do dispositivo na primeira, na segunda e na terceira rodadas?

Se um jogador escolher o número 2 para começar, o visor do dispositivo, na primeira rodada, exibirá o número:

$$y_1 = |2 \cdot 2 - 12| = |4 - 12| = |-8| = \boxed{8}$$

Na segunda rodada, o dispositivo usará o número $y_1 = 8$ como entrada e o visor exibirá o número:

$$y_2 = |2 \cdot 8 - 12| = |16 - 12| = |4| = \boxed{4}$$

Por fim, na terceira rodada, o dispositivo usará o número $y_2 = 4$ como entrada e o visor exibirá o número:

$$y_3 = |2 \cdot 4 - 12| = |8 - 12| = |-4| = \boxed{4}$$

Portanto, se um jogador escolher o número 2 para começar, os números que serão exibidos no visor do dispositivo na primeira, na segunda e na terceira rodadas são, respectivamente, 8, 4 e 4.

b) (5 pontos) Quais números, quando exibidos no visor, permanecem inalterados após o jogador pressionar a tecla uma vez?

Para que um número x permaneça inalterado após o jogador pressionar a tecla uma vez, devemos ter $y = x$, ou seja, $|2x - 12| = x$. Como $0 \leq x \leq 12$, vamos dividir o problema em dois casos:

- **Caso 1: $0 \leq x < 6$**:

$$\begin{aligned} &|2x - 12| = x \\ \Rightarrow\ &-2x + 12 = x \\ \Rightarrow\ &3x = 12 \\ \Rightarrow\ &\boxed{x = 4} \end{aligned}$$

- **Caso 2: $6 \leq x \leq 12$**:

$$\begin{aligned} &|2x - 12| = x \\ \Rightarrow\ &2x - 12 = x \\ \Rightarrow\ &\boxed{x = 12} \end{aligned}$$

Portanto, os números que, quando exibidos no visor, permanecem inalterados após o jogador pressionar a tecla uma vez são 4 e 12.

c) (6 pontos) Quais números, quando exibidos no visor, voltam a aparecer quando o jogador pressiona a tecla duas vezes consecutivas, mas não quando a pressiona uma única vez?

Quando um jogador escolhe o número x para começar:

- Na primeira rodada, o número exibido no visor do dispositivo é $|2x-12|$. Queremos que esse número seja diferente de x. De acordo com o item b, devemos ter, portanto, $x \neq 4$ e $x \neq 12$. (*)
- Na segunda rodada, o número exibido no visor é $|2\cdot|2x-12|-12|$, já que o número gerado na primeira rodada é usado como entrada da segunda. Queremos que esse número seja igual a x, ou seja, precisamos resolver a equação $|2\cdot|2x-12|-12| = x$.

Para resolver essa equação, é necessário analisar os sinais das expressões que aparecem dentro dos módulos. A expressão $2x-12$ é negativa para $x<6$ e positiva ou nula para $x \geq 6$. Já a expressão dentro do módulo externo, $2\cdot|2x-12|-12$, é negativa para $3<x<9$ e positiva ou nula para $x \leq 3$ ou $x \geq 9$. Portanto, precisamos considerar quatro casos na resolução da equação:

- **Caso 1: $0 \leq x < 3$**

  Temos $2x-12<0$ e $2\cdot|2x-12|-12>0$. Logo:

  $$|2\cdot|2x-12|-12| = x$$
  $$\Rightarrow 2\cdot|2x-12|-12 = x$$
  $$\Rightarrow 2\cdot(-2x+12)-12 = x$$
  $$\Rightarrow -4x+24-12 = x$$
  $$\Rightarrow 5x = 12$$
  $$\Rightarrow \boxed{x = \frac{12}{5} = 2{,}4}$$

  É uma solução válida, pois está entre 0 e 3.

- **Caso 2: $3 \leq x < 6$**

  Temos $2x-12<0$ e $2\cdot|2x-12|-12 \leq 0$. Logo:

  $$|2\cdot|2x-12|-12| = x$$
  $$\Rightarrow -2\cdot|2x-12|+12 = x$$
  $$\Rightarrow -2\cdot(-2x+12)+12 = x$$
  $$\Rightarrow 4x-24+12 = x$$
  $$\Rightarrow 3x = 12$$
  $$\Rightarrow \cancel{x = 4}$$

  Não é uma solução válida, de acordo com (*).

- **Caso 3: $6 \leq x < 9$**

  Temos $2x-12 \geq 0$ e $2\cdot|2x-12|-12<0$. Logo:

  $$|2\cdot|2x-12|-12| = x$$
  $$\Rightarrow -2\cdot|2x-12|+12 = x$$
  $$\Rightarrow -2\cdot(2x-12)+12 = x$$
  $$\Rightarrow -4x+24+12 = x$$
  $$\Rightarrow 5x = 36$$
  $$\Rightarrow \boxed{x = \frac{36}{5} = 7{,}2}$$

  É uma solução válida, pois está entre 6 e 9.

- **Caso 4: $9 \leq x \leq 12$**

  Temos $2x-12>0$ e $2\cdot|2x-12|-12 \geq 0$. Logo:

  $$|2\cdot|2x-12|-12| = x$$
  $$\Rightarrow 2\cdot|2x-12|-12 = x$$
  $$\Rightarrow 2\cdot(2x-12)-12 = x$$
  $$\Rightarrow 4x-24-12 = x$$
  $$\Rightarrow 3x = 36$$
  $$\Rightarrow \cancel{x = 12}$$

  Não é uma solução válida, de acordo com (*).

Portanto, os números que satisfazem as condições dadas são 2,4 e 7,2.

d) (6 pontos) Quais números podem ser escolhidos no início do jogo para que, após três rodadas, o visor exiba o número zero?

Para que o visor exiba o número 0 na terceira rodada, é necessário que o número exibido na segunda rodada seja x_2 tal que:

$$|2x_2 - 12| = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 6}$$

Agora, para que o visor exiba o número 6 na segunda rodada, é necessário que o número exibido na primeira rodada seja x_1 tal que:

$$|2x_1 - 12| = 6 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 2x_1 - 12 = 6 & \text{ou} \quad 2x_1 - 12 = -6 \\ 2x_1 = 18 & 2x_1 = 6 \\ \boxed{x_1 = 9} & \boxed{x_1 = 3} \end{array}$$

Por fim, para que o visor exiba os números 9 ou 3 na primeira rodada, é necessário que o número escolhido no início do jogo seja x_0 tal que:

$$|2x_0 - 12| = 9 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 2x_0 - 12 = 9 & \text{ou} \quad 2x_0 - 12 = -9 \\ 2x_0 = 21 & 2x_0 = 3 \\ x_0 = \frac{21}{2} & x_0 = \frac{3}{2} \\ \boxed{x_0 = 10{,}5} & \boxed{x_0 = 1{,}5} \end{array}$$

ou

$$|2x_0 - 12| = 3 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 2x_0 - 12 = 3 & \text{ou} \quad 2x_0 - 12 = -3 \\ 2x_0 = 15 & 2x_0 = 9 \\ x_0 = \frac{15}{2} & x_0 = \frac{9}{2} \\ \boxed{x_0 = 7{,}5} & \boxed{x_0 = 4{,}5} \end{array}$$

Portanto, os números que podem ser escolhidos no início do jogo para que, após três rodadas, o visor exiba o número zero são 1,5 ; 4,5 ; 7,5 e 10,5.

QUESTÃO 02

Em um programa de televisão, um participante tem a chance de ganhar um grande prêmio ao participar de um desafio que envolve 20 tentativas de acertar uma bola de basquete em uma cesta, seguidas de um sorteio ao final.

No início do desafio, há 16 bolas laranjas dentro de um grande globo transparente. Em cada tentativa, o participante arremessa uma bola, também laranja, em direção à cesta. Sempre que acerta a cesta, a bola utilizada no arremesso cai diretamente dentro do globo. Quando erra, o apresentador coloca uma bola preta no globo.

Ao final dos 20 arremessos, o globo gira para misturar todas as bolas e, em seguida, libera duas delas, uma de cada vez, de modo que todas as bolas tenham a mesma probabilidade de serem liberadas em cada vez. As bolas liberadas ficam em dois compartimentos separados, e o participante ganha o prêmio se as duas tiverem a mesma cor.

a) (4 pontos) Se o participante acertar metade dos 20 arremessos, qual é a probabilidade de ele ganhar o prêmio?

Se o participante acertar 10 arremessos e errar 10, então:

- O número de bolas laranjas no globo será $16+10=26$.
- O número de bolas pretas será 10.
- O número total de bolas no globo após todos os arremessos será $16+10+10=36$.

Sabemos que o globo libera duas bolas, uma de cada vez, de modo que todas as bolas tenham a mesma probabilidade de serem liberadas em cada vez. Além disso, o participante ganha o prêmio apenas se ambas tiverem a mesma cor. Portanto, a probabilidade de ele ganhar o prêmio acertando metade dos 20 arremessos é:

$$P = P(\text{2 bolas laranjas}) + P(\text{2 bolas pretas})$$

$$P = \frac{26}{36}\cdot\frac{25}{35} + \frac{10}{36}\cdot\frac{9}{35}$$

$$P = \frac{650+90}{1260}$$

$$P = \frac{74\cancel{0}}{126\cancel{0}}$$

$$\boxed{P = \frac{37}{63}}$$

b) (6 pontos) Se x é a quantidade de arremessos certos do participante, com $0 \le x \le 20$ e x inteiro, determine, em função de x, a probabilidade de ele ganhar o prêmio.

Se o participante acertar x arremessos, então:

- O número de bolas laranjas no globo será $16+x$.
- O número de bolas pretas será $20-x$.
- O número total de bolas no globo após todos os arremessos será sempre $16+20=36$.

Portanto, a probabilidade de ele ganhar o prêmio acertando x arremessos é:

$$P(x) = P(\text{2 bolas laranjas}) + P(\text{2 bolas pretas})$$

$$P(x) = \frac{16+x}{36} \cdot \frac{15+x}{35} + \frac{20-x}{36} \cdot \frac{19-x}{35}$$

$$P(x) = \frac{\left(240+31x+x^2\right)+\left(380-39x+x^2\right)}{1260}$$

$$P(x) = \frac{2x^2-8x+620}{1260}$$

$$\boxed{P(x) = \frac{x^2-4x+310}{630}}$$

c) (10 pontos) Para qual número de acertos a probabilidade de o participante ganhar o prêmio é mínima? E qual é o menor número de arremessos que o participante deve acertar para que a probabilidade de ganhar o prêmio seja maior do que a de não ganhar?

Para que a probabilidade de o participante ganhar o prêmio seja mínima, devemos encontrar o valor de x que minimiza a função quadrática $P(x)=\frac{x^2-4x+310}{630}$. Esse valor é a abscissa do vértice do gráfico parabólico da função, que pode ser determinada pela relação:

$$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{4}{\cancel{630}}}{2\cdot\frac{1}{\cancel{630}}}=\frac{4}{2}\Rightarrow \boxed{x_V=2}$$

Agora, para que a probabilidade de ganhar o prêmio seja maior do que a de não ganhar, devemos ter:

$$P(x)>1-P(x)$$

$$2P(x)>1$$

$$P(x)>\frac{1}{2}$$

Dessa forma:

$$\frac{x^2-4x+310}{630}>\frac{1}{2}$$

$$x^2-4x+310>315$$

$$x^2-4x-5>0$$

Como as raízes da equação $x^2-4x-5=0$ são -1 e 5, temos que:

$$x^2-4x-5>0 \Leftrightarrow \boxed{x<-1} \text{ ou } \boxed{x>5}$$

Logo, o participante deve acertar, no mínimo, 6 arremessos para que a probabilidade de ganhar o prêmio seja maior do que a de não ganhar.

QUESTÃO 03

Considere que o novalente de um número natural é aquele que é obtido quando substituímos cada um de seus algarismos pelo complementar em relação a 9. Por exemplo, os novalentes de 25, 68940 e 9137 são, respectivamente, 74, 31059 e 862.

a) (2 pontos) Determine o novalente de 2026. Em seguida, calcule a soma de 2026 com seu novalente.

O complementar de cada algarismo do número 2026 em relação a 9 é:

$$2 \to 7$$
$$0 \to 9$$
$$2 \to 7$$
$$6 \to 3$$

Logo, o novalente de 2026 é

$$\boxed{7973}$$

Desse modo, a soma de 2026 com seu novalente é:

$$2026 + 7973 = \boxed{9999}$$

b) (6 pontos) Se a diferença entre um número natural de cinco algarismos e o dobro de seu novalente é 2025, que número é esse?

Seja N o número procurado e M seu novalente. Como, para determinar o novalente de N, cada algarismo é substituído pelo complementar em relação a 9, temos que, para qualquer número de cinco algarismos:

$$N+M=99999 \Rightarrow M=99999-N$$

O enunciado nos informa que

$$N-2M=2025$$

Logo:

$$N-2(99999-N)=2025$$

$$N-199998+2N=2025$$

$$3N=202023$$

$$\boxed{N=67341}$$

c) (6 pontos) Seja N um número natural de dois algarismos e M seu novalente. Determine todos os valores inteiros positivos de K para os quais a equação

$$N - K \cdot M = 1$$

possui solução.

Se N é um número natural de dois algarismos e M é seu novalente, então:

$$N + M = 99 \Rightarrow M = 99 - N$$

De acordo com a equação dada:

$$N - K \cdot M = 1$$

$$N - K \cdot (99 - N) = 1$$

$$N - 99K + K \cdot N = 1$$

$$N \cdot (K + 1) = 99K + 1$$

$$N = \frac{99K + 1}{K + 1} = \frac{99K + 99 - 98}{K + 1} = \frac{99\cancel{(K+1)}}{\cancel{K+1}} - \frac{98}{K + 1}$$

$$\boxed{N = 99 - \frac{98}{K + 1}}$$

Como N deve ser um número natural, $K+1$ deve ser um divisor de 98. Além disso, como K deve ser positivo, então $K+1>1$. Os divisores de 98 maiores que 1 são:

2, 7, 14, 49 e 98

Dessa forma, para que a equação $N - K \cdot M = 1$ possua solução, é necessário que K seja igual a:

$$\boxed{1,\ 6,\ 13,\ 48 \text{ ou } 97}$$

d) (6 pontos) Existem números naturais cujos novalentes, quando lidos da direita para a esquerda, coincidem com os próprios números. Por exemplo, isso ocorre com 2367, pois seu novalente é 7632, que, lido da direita para a esquerda, resulta em 2367. Quantos números naturais menores que 1 milhão, formados apenas pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, possuem essa propriedade?

Primeiramente, perceba que, para que um número tenha essa propriedade, é necessário que:

- A soma do seu primeiro algarismo com o último seja 9.
- A soma do seu segundo algarismo com o penúltimo seja 9.
- A soma do seu terceiro algarismo com o antepenúltimo seja 9.
- E assim por diante...

Vamos justificar esse fato. Considere um número de n algarismos

$$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$$

Seu novalente é:

$$(9-A_1)(9-A_2)\cdots(9-A_{n-1})(9-A_n)$$

Ao lê-lo da direita para a esquerda, obtemos:

$$(9-A_n)(9-A_{n-1})\cdots(9-A_2)(9-A_1)$$

Para que esse número coincida com o original, é necessário que se tenha:

- $9-A_n=A_1 \Rightarrow A_1+A_n=9$
- $9-A_{n-1}=A_2 \Rightarrow A_2+A_{n-1}=9$
- E assim por diante

Como os números que queremos podem ser formados apenas pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, cada par de algarismos (primeiro e último, segundo e penúltimo, e assim por diante) pode ser escolhido de apenas 8 maneiras, já que ao escolher um deles, o correspondente na posição oposta fica determinado. Perceba também que, se o número tiver uma quantidade ímpar de algarismos, o algarismo central somado com ele mesmo teria que ser 9, o que não é possível para um número inteiro.

Assim, os números com a propriedade enunciada só podem ter uma quantidade par de algarismos. Como eles devem ser menores que 1 milhão, eles só podem ter 2, 4 ou 6 algarismos.

- Com 2 algarismos, temos $8\cdot1=8$ possibilidades;
- Com 4 algarismos, temos $8\cdot8\cdot1\cdot1=64$ possibilidades;
- Com 6 algarismos, temos $8\cdot8\cdot8\cdot1\cdot1\cdot1=512$ possibilidades;

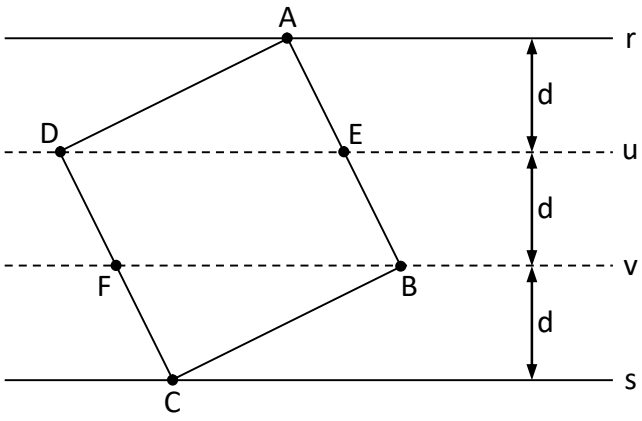
Portanto, a quantidade de números naturais menores que 1 milhão, formados apenas pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, que possuem a propriedade mencionada é:

$$8+64+512=\boxed{584}$$

QUESTÃO 04

A figura ao lado ilustra um quadrado ABCD, com área de 20 cm², situado entre duas retas paralelas r e s, com $A \in r$ e $C \in s$. Entre essas retas, há outras duas retas paralelas a elas, u e v, cada uma passando por um dos vértices do quadrado. A distância entre cada par de retas paralelas vizinhas é a mesma e igual a d.

Além disso, E é o ponto de intersecção da reta u com o segmento $\overline{AB}$ e F é o ponto de intersecção da reta v com o segmento $\overline{CD}$.



a) (6 pontos) Determine o comprimento AB do lado do quadrado. Em seguida, determine os comprimentos AE e DE.

Como ABCD é um quadrado com 20 cm² de área, temos:

$$AB^2 = 20$$
$$AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5}$$
$$\boxed{AB = 2\sqrt{5}\ \text{cm}}$$

Agora, como r, u e v são três retas paralelas, temos, pelo Teorema de Tales, que:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{d}{2d} \Rightarrow \frac{AE}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{AE = \sqrt{5}\ \text{cm}}$$

Por fim, note que o triângulo ADE é retângulo em A. Nesse triângulo, os catetos medem $AD = AB = 2\sqrt{5}$ cm e $AE = \sqrt{5}$ cm. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2$$
$$DE^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$DE^2 = 20 + 5$$
$$DE^2 = 25$$
$$\boxed{DE = 5\ \text{cm}}$$

b) (4 pontos) Determine a distância d entre cada par de retas paralelas vizinhas.

A distância d é a altura do triângulo retângulo ADE em relação a sua hipotenusa. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que:

$$DE \cdot d = AD \cdot AE$$
$$5 \cdot d = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$
$$5 \cdot d = 10$$
$$\boxed{d = 2 \text{ cm}}$$

Observação: Pode-se provar que essa relação métrica é válida comparando duas maneiras distintas de se calcular a área do triângulo retângulo ADE. Sabemos que:

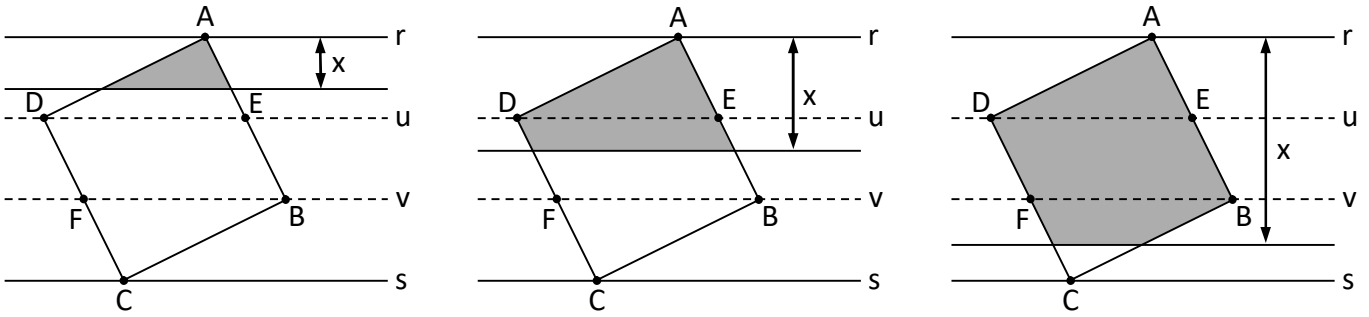
$$\text{Área} = \frac{DE \cdot d}{2} \quad \text{e} \quad \text{Área} = \frac{AD \cdot AE}{2}$$

Logo:

$$\frac{DE \cdot d}{2} = \frac{AD \cdot AE}{2} \Rightarrow DE \cdot d = AD \cdot AE$$

c) (10 pontos) Considere uma reta paralela às retas r, s, u e v, situada entre r e s, cuja distância até r é x. Determine, em função de x, a área $A(x)$ da região do quadrado situada acima dessa reta.

As figuras a seguir ilustram algumas dessas possíveis regiões. Observe, ainda, que a função $A(x)$ deve ser definida por mais de uma sentença.



Como a distância entre cada par de retas vizinhas é $d = 2$ cm, a distância entre r e s é $3d = 6$ cm. Portanto, o domínio da função é o intervalo $[0,6]$. Para calcular a área da região do quadrado situada acima da reta mencionada, vamos considerar três casos:

- **1º caso: $0 \le x \le 2$**

  Nesse caso, a região é um triângulo semelhante ao triângulo ADE, cuja altura relativa à hipotenusa mede x. Sendo y a medida da sua hipotenusa, temos, por semelhança de triângulos:

  $$\frac{y}{x} = \frac{DE}{d} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5x}{2}$$

  Logo, para $0 \le x \le 2$:

  $$A(x) = \frac{1}{2} \cdot y \cdot x \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{2} \cdot x \Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{5x^2}{4}}$$

- **2º caso: $2 < x \le 4$**

  Nesse caso, a região é formada por um triângulo de área $\frac{5 \cdot 2^2}{4} = 5\ \text{cm}^2$ e um paralelogramo de base $DE = 5$ cm e altura $x - 2$. Assim:

  $$A(x) = 5 + 5 \cdot (x - 2) \Rightarrow \boxed{A(x) = 5x - 5}$$

- **3º caso: $4 < x \leq 6$**

Nesse caso, é mais simples calcular a área procurada subtraindo, da área total do quadrado, a área da região abaixo da reta considerada, que é um triângulo semelhante ao triângulo ADE cuja altura relativa à hipotenusa mede $6-x$. Sendo z a medida da hipotenusa, temos, por semelhança de triângulos:

$$\frac{z}{6-x} = \frac{DE}{d} \Rightarrow \frac{z}{6-x} = \frac{5}{2} \Rightarrow z = \frac{5(6-x)}{2}$$

Como a área do quadrado é 20 cm², temos:

$$A(x) = 20 - \frac{1}{2} \cdot z \cdot (6-x)$$

$$A(x) = 20 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5(6-x)}{2} \cdot (6-x)$$

$$A(x) = 20 - \frac{5(6-x)^2}{4}$$

$$A(x) = \frac{80 - 180 + 60x - 5x^2}{4}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{-5x^2 + 60x - 100}{4}}$$

Portanto, a função solicitada é:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{5x^2}{4} & , \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 5x - 5 & , \text{se } 2 < x \leq 4 \\ \frac{-5x^2 + 60x - 100}{4} & , \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

QUESTÃO 05

Na sequência numérica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, a soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = 2n^3 - 27n^2 - 974n$$

a) (2 pontos) Qual é a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência?

A soma dos 10 primeiros termos dessa sequência é:

$$S_{10} = 2 \cdot 10^3 - 27 \cdot 10^2 - 974 \cdot 10$$

$$S_{10} = 2000 - 2700 - 9740$$

$$\boxed{S_{10} = -10440}$$

b) (4 pontos) Qual é o 10° termo dessa sequência?

Para determinar o 10° termo, subtraímos a soma dos nove primeiros termos da soma dos dez primeiros termos:

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

Já sabemos que $S_{10} = -10440$. Agora:

$$S_9 = 2 \cdot 9^3 - 27 \cdot 9^2 - 974 \cdot 9$$

$$S_9 = 2 \cdot 729 - 27 \cdot 81 - 974 \cdot 9$$

$$S_9 = 1458 - 2187 - 8766$$

$$S_9 = -9495$$

Logo:

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$a_{10} = -10440 - (-9495)$$

$$\boxed{a_{10} = -945}$$

c) (8 pontos) Um dos termos dessa sequência é exatamente igual ao quadrado de sua posição, ou seja, existe um número natural n tal que $a_n = n^2$. Em que posição da sequência esse termo se encontra?

Sabemos que:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Portanto:

$$a_n = \left(2n^3 - 27n^2 - 974n\right) - \left(2(n-1)^3 - 27(n-1)^2 - 974(n-1)\right)$$

$$a_n = \left(2n^3 - 27n^2 - 974n\right) - \left(2\left(n^3 - 3n^2 + 3n - 1\right) - 27\left(n^2 - 2n + 1\right) - 974(n-1)\right)$$

$$a_n = \left(\cancel{2n^3} \cancel{-27n^2} \cancel{-974n}\right) - \left(\cancel{2n^3} - 6n^2 + 6n - 2 \cancel{-27n^2} + 54n - 27 \cancel{-974n} + 974\right)$$

$$\boxed{a_n = 6n^2 - 60n - 945}$$

Queremos encontrar a posição n para a qual $a_n = n^2$. Logo:

$$6n^2 - 60n - 945 = n^2$$

$$5n^2 - 60n - 945 = 0$$

$$n^2 - 12n - 189 = 0$$

$$n = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-189)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 756}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{12 \pm 30}{2}$$

$\cancel{n = -9}$ ou $\boxed{n = 21}$

Como uma posição na sequência deve ser um número natural, descartamos $n = -9$. Portanto, o termo procurado ocupa a posição:

$$\boxed{n = 21}$$

d) (6 pontos) Determine todos os pares de posições distintas r e s ($r < s$) para os quais $a_r = a_s$.

Utilizando a expressão do termo geral encontrado no item anterior, temos:

$$a_r = a_s$$

$$6r^2 - 60r \cancel{- 945} = 6s^2 - 60s \cancel{- 945}$$

$$6\left(r^2 - s^2\right) = 60\left(r - s\right)$$

$$6\cancel{\left(r - s\right)} \cdot \left(r + s\right) = 60\cancel{\left(r - s\right)}$$

$$\boxed{r + s = 10}$$

Logo, como r e s são posições naturais de uma sequência, com $r < s$, os pares para os quais $a_r = a_s$ são:

r	s
1	9
2	8
3	7
4	6

Elaboração da Prova e da Resolução Comentada:

Prof. Felipe Mascagna Bittencourt Lima

Coordenador da Comissão de Provas da OMIF
Docente do IFSP – Campus São João da Boa Vista