# OMIF 2025 – PROVA DA 2ª FASE

## 21 de novembro de 2025

| Nome: | |
|---|---|
| Número de Identificação: | |
| Instituição (Sigla): | Campus: |

## Instruções

1. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima.
2. Esta prova é composta por 5 questões dissertativas e cada uma ocupa exatamente uma folha deste caderno de questões (frente e verso). Quando o aplicador permitir que se inicie a realização da prova:
   a) Confira se todas as 5 questões estão presentes neste caderno;
   b) Confira se o seu Número de Identificação está correto em todas as folhas com questões deste caderno. Esse número aparece no início de cada questão;
   c) Caso haja alguma inconsistência, avise o aplicador.
3. Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal. A prova pode ser resolvida a lápis ou à caneta.
4. A solução de cada item deve ser escrita apenas no local reservado para ela, de maneira organizada e legível.
5. É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando os cálculos e/ou raciocínios utilizados. Respostas sem justificava não serão consideradas na correção.
6. A prova tem duração de DUAS HORAS E TRINTA MINUTOS (2h 30min), EXCETO para estudantes com deficiências ou necessidades específicas que possuem laudo médico comprobatório. Estes terão direito a uma hora adicional para a resolução da prova.
7. É terminantemente proibido, durante a prova, qualquer comunicação entre os estudantes, acesso à internet, uso de outros materiais impressos e utilização de *tablets*, celulares, calculadoras ou qualquer outro aparelho eletrônico e/ou de comunicação, EXCETO para estudantes que fazem jus à prova adaptada, os quais poderão acessar os vídeos ou os áudios disponibilizados pela Comissão de Acessibilidade e Inclusão. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.
8. Quando terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

**QUESTÃO 01**

**Nº de Identificação:**

Seja S a sequência crescente formada por todos os números naturais cujo primeiro algarismo é 2 e cujo último algarismo é 5, isto é, $S=(25,\ 205,\ 215,\ \ldots,\ 2025,\ \ldots)$.

**a) (3 pontos)** Qual é o 25º termo de S?

N1 N2

**b) (5 pontos)** Determine o valor de k sabendo que a soma dos k primeiros termos de S é 8570.

N1 N2

**c) (5 pontos)** Qual é a soma de todos os elementos de S com até 4 algarismos?

N1 N2

**d) (7 pontos)** Determine, em função de n, com $n \geq 2$, a soma de todos os elementos de S com até n algarismos.

N1 N2

**QUESTÃO 02** **Nº de Identificação:**

Um número natural é chamado de primoroso quando todos os seus algarismos são números primos. Dessa forma, os números 235 e 7522 são primorosos, enquanto os números 173 e 3554 não são. Com base nessa definição, responda:

**a) (5 pontos)** Quantos números primorosos de cinco algarismos são múltiplos de 5? E quantos números primorosos de quatro algarismos são múltiplos de 4?

N1 N2

**b) (5 pontos)** Quantos números primorosos de três algarismos são múltiplos de 3?

N1 N2

**c) (5 pontos)** Um número primoroso de três algarismos distintos é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ser também um número primo?

N1 N2

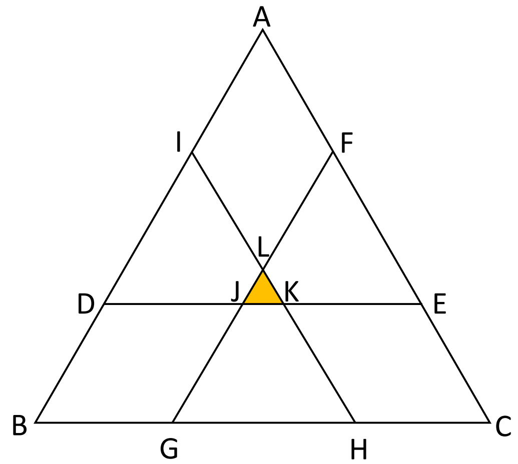
**d) (5 pontos)** Considere dois números primorosos, de forma que cada um deles tenha todos os seus algarismos distintos. Se a diferença entre eles é 7266, que números são esses?

N1 N2

**QUESTÃO 03**

**Nº de Identificação:**

Na figura ao lado, ABC é um triângulo equilátero com lados de 4 cm de comprimento. Cada um dos segmentos $\overline{DE}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$ é paralelo a um dos lados do triângulo ABC e divide esse triângulo em duas regiões de áreas iguais. Assim, por exemplo, a área do triângulo ADE é igual à área do trapézio BCED.




Além disso, os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$ interceptam-se dois a dois nos pontos J, K e L, conforme mostra a figura.

Com base nessas informações, responda:

**a) (4 pontos)** Qual é o comprimento do segmento $\overline{DE}$?

N1 N2

**b) (4 pontos)** Qual é o comprimento do segmento $\overline{GH}$?

N1 N2

**c) (4 pontos)** Qual é a área do triângulo GHL?

N1 N2

**d) (8 pontos)** Qual é a área do triângulo JKL?

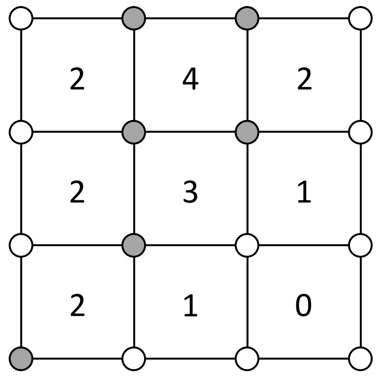
N1 N2

**QUESTÃO 04** **Nº de Identificação:**

Considere um painel digital quadrado com lados de n decímetros, dividido em $n^2$ quadradinhos com lados de 1 decímetro. Em cada vértice dos quadradinhos há uma lâmpada, que pode ficar acesa ou apagada de maneira independente das demais.

A cada instante, o painel exibe, automaticamente, no centro de cada quadradinho, um número inteiro de 0 a 4, correspondente à quantidade de lâmpadas acesas em seus quatro vértices.

A figura ao lado ilustra o caso $n=3$ em um determinado momento. Os círculos brancos representam lâmpadas apagadas e os círculos cinzas representam lâmpadas acesas.




**a) (4 pontos)** Se n fosse 45, quantas lâmpadas existiriam no painel? E qual seria o maior valor possível para a soma dos números exibidos no interior de cada quadradinho?

N1 N2

**b) (6 pontos)** Considere que, para $n=45$, a soma dos números exibidos no interior de cada quadradinho, em um determinado momento, é igual a 8000. Qual é o menor número possível de lâmpadas acesas no painel nesse instante? E qual é o maior número possível?

N1 N2

**c) (10 pontos)** Considere agora um painel com $n = 5$. Se a soma dos números exibidos no interior de cada quadradinho, em um determinado momento, é 7, qual é a probabilidade de que a quantidade de lâmpadas acesas nesse painel seja um número ímpar? Considere que qualquer lâmpada do painel tem igual probabilidade de estar acesa ou apagada.

N1 N2

**QUESTÃO 05** **Nº de Identificação:**

Seja $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a função definida por

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

Além disso, para cada inteiro positivo n, defina a função $f_n:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ como aquela que satisfaz:

$$\begin{cases} f_1(x)=f(x) \\ f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right), \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

**a) (4 pontos)** Com base nessa definição, calcule $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_3(1)$ e $f_4(1)$.

N1 N2

**b) (8 pontos)** Seja $F$ a sequência infinita formada pelos valores de $f_n(1)$, com $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, isto é,

$$F=\left(f_1(1), f_2(1), f_3(1), f_4(1), f_5(1), \ldots\right).$$

Qual é o produto dos 15 primeiros termos dessa sequência?

N1 N2

**c) (8 pontos)** Na sequência *F* considerada no item anterior, sabe-se que, quando n é muito grande, os termos $f_n(1)$ e $f_{n+1}(1)$ assumem valores praticamente iguais, o que indica que os termos da sequência ficam cada vez mais próximos de um mesmo número. Em linguagem mais técnica, dizemos que essa sequência converge, isto é, que seus termos se aproximam de um valor específico à medida que n aumenta indefinidamente. Com base nessas informações, determine o valor para o qual a sequência *F* converge.

N1 N2