OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

# OMIF 2026 – PROVA DA 2ª FASE

## 30 de outubro de 2026

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Número de Identificação: | |
| Instituição (Sigla): | Campus: |

## Instruções

**1.** Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima.

**2.** Esta prova é composta por 5 questões dissertativas e cada uma ocupa exatamente uma folha deste caderno de questões (frente e verso). Quando o aplicador permitir que se inicie a realização da prova:
   a) Confira se todas as 5 questões estão presentes neste caderno;
   b) Confira se o seu Número de Identificação está correto em todas as folhas com questões deste caderno. Esse número aparece no início de cada questão;
   c) Caso haja alguma inconsistência, avise o aplicador.

**3.** Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal. A prova pode ser resolvida a lápis ou à caneta.

**4.** A solução de cada item deve ser escrita apenas no local reservado para ela, de maneira organizada e legível.

**5.** É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando os cálculos e/ou raciocínios utilizados. Respostas sem justificava não serão consideradas na correção.

**6.** A prova tem duração de DUAS HORAS E TRINTA MINUTOS (2h 30min), EXCETO para estudantes com deficiências ou necessidades específicas que possuem laudo médico comprobatório. Estes terão direito a uma hora adicional para a resolução da prova.

**7.** É terminantemente proibido, durante a prova, qualquer comunicação entre os estudantes, acesso à internet, uso de outros materiais impressos e utilização de *tablets*, celulares, calculadoras ou qualquer outro aparelho eletrônico e/ou de comunicação, EXCETO para estudantes que fazem jus à prova adaptada, os quais poderão acessar os vídeos ou os áudios disponibilizados pela Comissão de Acessibilidade e Inclusão. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

**8.** Quando terminar a prova, entregue-a ao aplicador.

RASCUNHO

## QUESTÃO 01

**Nº de Identificação:**

Em um jogo de tabuleiro, cada jogador recebe um dispositivo que determina a distância, em centímetros, que sua peça deve avançar em cada rodada. Antes de o jogo começar, cada jogador escolhe um número racional de 0 a 12 e o digita no dispositivo. Esse número fica exibido no visor e serve como entrada inicial.

A partir daí, em cada rodada, os jogadores pressionam uma tecla do dispositivo que transforma o número exibido no seu visor. O valor resultante dessa transformação indica a distância que o jogador deverá percorrer naquela rodada, além de servir também como entrada para a rodada seguinte.

Os jogadores não conhecem a regra usada pelo dispositivo, mas, quando o visor mostra o número x, a tecla o transforma em y, sendo:

$$y = |2x - 12| \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = \begin{cases} -2x + 12\,, & \text{se } 0 \le x < 6 \\ 2x - 12\,, & \text{se } 6 \le x \le 12 \end{cases}$$

Por exemplo, se o visor do dispositivo mostra o número 2,5, o jogador verá o número 7 após pressionar a tecla uma vez. Ao pressionar a tecla novamente, o visor passará a mostrar o número 2. A diversão do jogo está justamente em tentar descobrir o comportamento do dispositivo e prever o que acontecerá nas rodadas seguintes.

**a) (3 pontos)** Se um jogador escolher o número 2 para começar, quais serão os números exibidos no visor do dispositivo na primeira, na segunda e na terceira rodadas?

N1 N2

---

**b) (5 pontos)** Quais números, quando exibidos no visor, permanecem inalterados após o jogador pressionar a tecla uma vez?

N1 N2

---

**c) (6 pontos)** Quais números, quando exibidos no visor, voltam a aparecer quando o jogador pressiona a tecla duas vezes consecutivas, mas não quando a pressiona uma única vez?

N1 N2

**d) (6 pontos)** Quais números podem ser escolhidos no início do jogo para que, após três rodadas, o visor exiba o número zero?

N1 N2

**QUESTÃO 02** **Nº de Identificação:**

Em um programa de televisão, um participante tem a chance de ganhar um grande prêmio ao participar de um desafio que envolve 20 tentativas de acertar uma bola de basquete em uma cesta, seguidas de um sorteio ao final.

No início do desafio, há 16 bolas laranjas dentro de um grande globo transparente. Em cada tentativa, o participante arremessa uma bola, também laranja, em direção à cesta. Sempre que acerta a cesta, a bola utilizada no arremesso cai diretamente dentro do globo. Quando erra, o apresentador coloca uma bola preta no globo.

Ao final dos 20 arremessos, o globo gira para misturar todas as bolas e, em seguida, libera duas delas, uma de cada vez, de modo que todas as bolas tenham a mesma probabilidade de serem liberadas em cada vez. As bolas liberadas ficam em dois compartimentos separados, e o participante ganha o prêmio se as duas tiverem a mesma cor.

**a) (4 pontos)** Se o participante acertar metade dos 20 arremessos, qual é a probabilidade de ele ganhar o prêmio?

N1 N2

**b) (6 pontos)** Se x é a quantidade de arremessos certos do participante, com $0 \leq x \leq 20$ e x inteiro, determine, em função de x, a probabilidade de ele ganhar o prêmio.

N1 N2

**c) (10 pontos)** Para qual número de acertos a probabilidade de o participante ganhar o prêmio é mínima? E qual é o menor número de arremessos que o participante deve acertar para que a probabilidade de ganhar o prêmio seja maior do que a de não ganhar?

N1 N2

**QUESTÃO 03** **Nº de Identificação:**

Considere que o novalente de um número natural é aquele que é obtido quando substituímos cada um de seus algarismos pelo complementar em relação a 9. Por exemplo, os novalentes de 25, 68940 e 9137 são, respectivamente, 74, 31059 e 862.

**a) (2 pontos)** Determine o novalente de 2026. Em seguida, calcule a soma de 2026 com seu novalente.

N1 N2

**b) (6 pontos)** Se a diferença entre um número natural de cinco algarismos e o dobro de seu novalente é 2025, que número é esse?

N1 N2

**c) (6 pontos)** Seja N um número natural de dois algarismos e M seu novalente. Determine todos os valores inteiros positivos de K para os quais a equação

$$N - K \cdot M = 1$$

possui solução.

N1 N2

---

**d) (6 pontos)** Existem números naturais cujos novalentes, quando lidos da direita para a esquerda, coincidem com os próprios números. Por exemplo, isso ocorre com 2367, pois seu novalente é 7632, que, lido da direita para a esquerda, resulta em 2367. Quantos números naturais menores que 1 milhão, formados apenas pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, possuem essa propriedade?

N1 N2

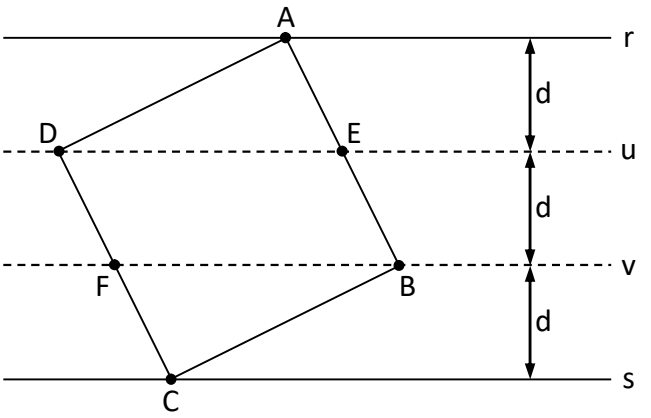
---

## QUESTÃO 04

**Nº de Identificação:**

A figura ao lado ilustra um quadrado ABCD, com área de 20 cm², situado entre duas retas paralelas r e s, com $A \in r$ e $C \in s$. Entre essas retas, há outras duas retas paralelas a elas, u e v, cada uma passando por um dos vértices do quadrado. A distância entre cada par de retas paralelas vizinhas é a mesma e igual a d.

Além disso, E é o ponto de intersecção da reta u com o segmento $\overline{AB}$ e F é o ponto de intersecção da reta v com o segmento $\overline{CD}$.




**a) (6 pontos)** Determine o comprimento AB do lado do quadrado. Em seguida, determine os comprimentos AE e DE.

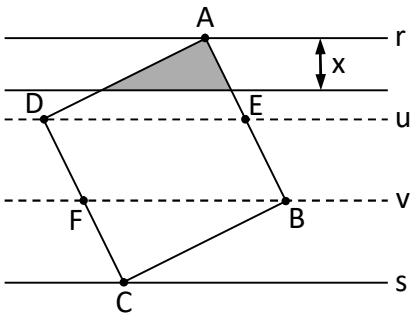
N1 N2

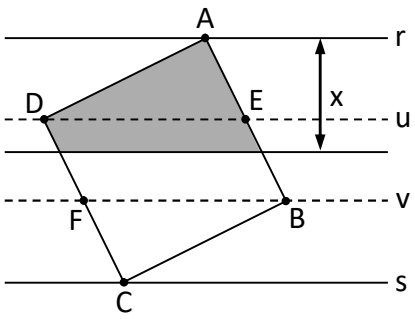
**b) (4 pontos)** Determine a distância d entre cada par de retas paralelas vizinhas.

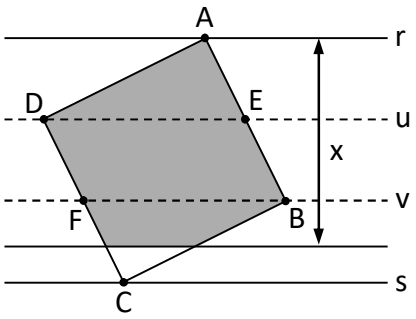
N1 N2

**c) (10 pontos)** Considere uma reta paralela às retas r, s, u e v, situada entre r e s, cuja distância até r é x. Determine, em função de x, a área $A(x)$ da região do quadrado situada acima dessa reta.

As figuras a seguir ilustram algumas dessas possíveis regiões. Observe, ainda, que a função $A(x)$ deve ser definida por mais de uma sentença.




N1 N2

**QUESTÃO 05** **Nº de Identificação:**

Na sequência numérica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, a soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = 2n^3 - 27n^2 - 974n$$

**a) (2 pontos)** Qual é a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência?

N1 N2

**b) (4 pontos)** Qual é o 10° termo dessa sequência?

N1 N2

**c) (8 pontos)** Um dos termos dessa sequência é exatamente igual ao quadrado de sua posição, ou seja, existe um número natural n tal que $a_n = n^2$. Em que posição da sequência esse termo se encontra?

N1 N2

**d) (6 pontos)** Determine todos os pares de posições distintas r e s ($r < s$) para os quais $a_r = a_s$.

N1 N2

Prova elaborada por:

**Prof. Felipe Mascagna Bittencourt Lima**

Coordenador da Comissão de Provas da OMIF
Docente do IFSP – Campus São João da Boa Vista