OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES FEDERAIS

VI OMIF – 2023 – INSTRUÇÕES E FICHA DE RESPOSTAS

Nome:
Escola:
Turma:

Instruções

1. Na ficha de respostas abaixo, preencha com caneta azul ou preta todo o círculo correspondente à letra que você escolher como resposta para cada questão, conforme o exemplo: 01 Ⓐ ● Ⓒ Ⓓ Ⓔ
A marcação em mais de uma opção anula a questão, mesmo que uma das respostas esteja correta.

2. A duração da prova é de DUAS HORAS E TRINTA MINUTOS (2h30min), já incluído o tempo para preenchimento da sua ficha de respostas, EXCETO para estudantes com deficiências ou necessidades específicas, que terão direito a uma hora adicional para a resolução da prova.

3. É terminantemente proibido, durante a prova, qualquer comunicação entre os estudantes, acesso à internet, uso de outros materiais impressos e utilização de *tablets*, celulares, calculadoras ou qualquer outro aparelho eletrônico e/ou de comunicação, EXCETO para estudantes que fazem jus à prova adaptada, os quais poderão acessar os vídeos ou os áudios disponibilizados pela Comissão de Acessibilidade e Inclusão. Nesses casos, o aparelho eletrônico (notebook, *tablet* ou smartphone) a ser utilizado para acessar esses materiais deverá ser indicado e conferido pelo coordenador local. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

4. Quando terminar, devolva <u>esta folha</u> e o <u>caderno de questões</u> para o aplicador. Caso tenha utilizado folhas para rascunho, elas também deverão ser entregues para o aplicador.

Ficha de respostas

01	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
02	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
03	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
04	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
05	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
06	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
07	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ

Acertos Nível 1: (Questões de 01 a 07)

08	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
09	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
10	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
11	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
12	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
13	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
14	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ

Acertos Nível 2: (Questões de 08 a 14)

15	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
16	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
17	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
18	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
19	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
20	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
21	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ

Acertos Nível 3: (Questões de 15 a 21)

RASCUNHO

Nome:	
Escola:	
Turma:	

As seguintes questões compõem a prova da OMIF e possuem apenas uma alternativa correta.

NÍVEL 1
(3 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 01

Alaor, Belaor e Celaor são três amigos cujos aniversários de 15 anos ocorreram numa mesma semana, mas em dias diferentes, de segunda a quarta-feira. Na terça-feira da referida semana, eles disseram o seguinte para seu professor de matemática:

- Alaor: Ontem foi o aniversário de Belaor.
- Belaor: Farei aniversário amanhã.
- Celaor: Fiz aniversário ontem.

Se apenas um deles mentiu para o professor, pode-se concluir corretamente que:

A) Alaor é o mais novo dos três amigos.
B) Belaor é o mais velho dos três amigos.
C) Nem todos tinham a mesma idade um dia após a conversa com o professor.
D) No dia da conversa com o professor, eles tinham a mesma idade.
E) Alaor fez aniversário no dia da conversa com o professor.

QUESTÃO 02

Na operação de adição indicada a seguir, as letras A, B e C representam algarismos distintos do sistema de numeração decimal.

$$\begin{array}{r} A\ A\ A \\ +\ B\ B\ B \\ C\ C\ C \\ \hline 1\ 9\ C\ B \end{array}$$

Desse modo, o valor de $A^2 - B^2 + C^2$ é:

A) 36
B) 33
C) 21
D) 18
E) 16

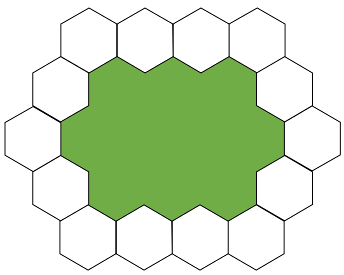
QUESTÃO 03

O novo modelo de placas de identificação veicular do Brasil, que já está em circulação há alguns anos, possui um padrão de estampagem composto de sete caracteres alfanuméricos, na sequência LLLNLNN, em que L representa uma das 26 letras maiúsculas do nosso alfabeto e N um dos algarismos de 0 a 9 do sistema de numeração decimal. Assim, OMI7F89 e BON0D07 são exemplos de placas desse novo modelo. Utilizando todas as letras da palavra OMIF e apenas os algarismos 0, 2 e 3, sem repetição, quantas placas diferentes desse modelo podem ser fabricadas de modo que a letra F apareça antes da letra M?

A) 36
B) 48
C) 72
D) 144
E) 324

QUESTÃO 04

A figura abaixo é formada por 14 hexágonos regulares congruentes e por um polígono de 22 lados, cujo interior está pintado. Se a área deste polígono de 22 lados é igual a $30\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, então a medida, em cm, do lado de cada hexágono regular é igual a:



A) $\sqrt{1}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{4}$
E) $2\sqrt{3}$

QUESTÃO 05

Uma professora de matemática pediu ao seu aluno Pedro para que ele resolvesse dois sistemas lineares que estavam anotados no quadro, enquanto ela ia rapidamente até a sala dos professores. Pedro sabia que, nas equações dos sistemas, as incógnitas apareciam apenas nos primeiros membros e os termos independentes apareciam apenas nos segundos membros. Porém, antes que ele pudesse ver o que estava escrito, seu amigo, Jotinha, apagou parte dos sistemas, que ficaram da maneira ilustrada a seguir:

$$\begin{cases} x - 2y = \text{[redacted]} \\ -x + y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + y = \text{[redacted]} \\ \text{[redacted]} = \text{[redacted]} \end{cases}$$

Mesmo assim, Pedro conseguiu resolvê-los corretamente, pois um outro colega lhe disse que tinha visto que os três termos independentes apagados eram iguais entre si e que a professora havia dito que os sistemas eram equivalentes, ou seja, que apresentavam a mesma solução. Os termos independentes apagados eram o número:

A) -3
B) 1
C) 2
D) 3
E) 5

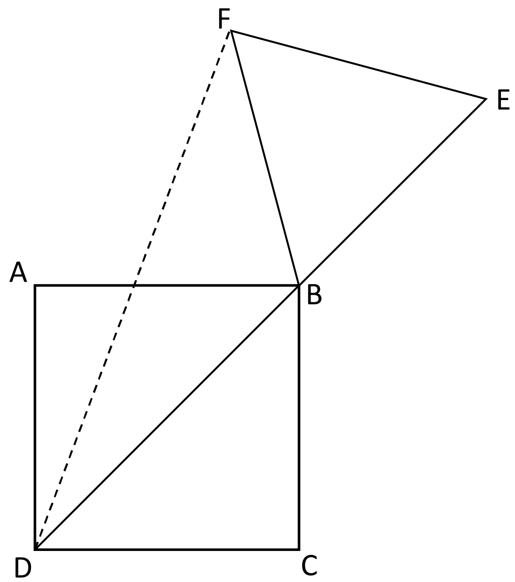
QUESTÃO 06

Uma moeda honesta foi lançada até que se observassem exatamente três resultados consecutivos iguais. A probabilidade de a moeda ter sido lançada exatamente cinco vezes é:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{16}$
E) $\frac{1}{32}$

QUESTÃO 07

Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e BFE é um triângulo equilátero. Se ambos possuem lados de medida igual a 1 cm e os pontos D, B e E são colineares, então a medida de $\overline{DF}$, em cm, é:



A) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$
B) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$
C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
D) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
E) $\sqrt{6-\sqrt{3}}$

NÍVEL 2
(4 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 08

Um professor de eletrônica de uma instituição federal orientou uma turma do último ano do curso de automação industrial na produção de dois tipos de robôs. Um tipo foi programado para dizer sempre verdade e o outro tipo foi programado para sempre mentir. Um professor de Matemática dessa instituição está avaliando um grupo de sete desses robôs produzidos pelos alunos – rotulados de Euler, Cardano, Pitágoras, Fermat, Aristóteles, Tales e Gauss – para determinar quantos, dentre os sete, são do tipo que sempre mentem. Para isso, o professor faz a seguinte pergunta a Euler:

– Você é do tipo mentiroso?

Euler responde, mas o professor, distraído, não ouve a resposta. Os robôs restantes fazem, então, as seguintes declarações:

- Cardano: Euler respondeu SIM.
- Pitágoras: Cardando acabou de mentir.
- Fermat: Pitágoras também mentiu.
- Aristóteles: Fermat mentiu.
- Tales: Aristóteles disse verdade.
- Gauss: Euler é do tipo mentiroso.

Mesmo sem ter prestado atenção à resposta de Euler, o professor de Matemática pode concluir corretamente que, naquele grupo de robôs:

A) Apenas Euler é do tipo mentiroso.
B) Há exatamente dois do tipo mentiroso: Cardano e Fermat.
C) Há exatamente dois do tipo mentiroso: Euler e Pitágoras.
D) Há exatamente três do tipo mentiroso: Cardano, Fermat e Gauss.
E) Há exatamente três do tipo mentiroso: dois deles são Cardano e Fermat e o terceiro ou é Euler ou é Gauss.

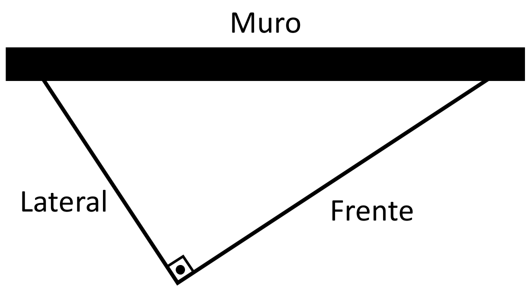
QUESTÃO 09

Considere que AB é um número de dois algarismos, sendo A o algarismo das dezenas e B o algarismo das unidades. Sabendo que o tempo representado por AB dias é igual ao tempo representado por B semanas mais A dias, e que A possui uma quantidade ímpar de divisores inteiros positivos, pode-se concluir que $A+B$ é igual a:

A) 5
B) 6
C) 8
D) 10
E) 15

QUESTÃO 10

João deseja delimitar uma área do seu terreno para servir como galinheiro, aproveitando um muro de 30 metros de comprimento e uma sobra de material de outro projeto, suficiente para construir 20 metros de cerca. Por motivos de logística, o galinheiro deverá ter a forma de um triangulo retângulo de modo que o muro contenha a sua hipotenusa, conforme a figura abaixo:



A sobra de material será utilizada apenas para construir a cerca da frente e da lateral, uma vez que o muro já servirá para completar a delimitação do galinheiro. Considerando que João delimitará a maior área possível com este material e que ele colocará, no máximo, três galinhas por metro quadrado, a quantidade máxima de galinhas que serão colocadas neste galinheiro é:

A) 50
B) 75
C) 100
D) 150
E) 300

QUESTÃO 11

Seja N um número natural tal que:

$$N = 2023^2 - 2022^2 + 2021^2 - 2020^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$$

O resto da divisão de N por 5 é:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

QUESTÃO 12

Uma caixa contém n bolas, numeradas de 1 a n, com $n \geq 4$. Todas são idênticas, exceto pelos números nelas estampados. Se quatro bolas são extraídas da caixa ao mesmo tempo, de maneira aleatória, a probabilidade de que elas contenham quatro números consecutivos é, em função de n, igual a:

A) $\dfrac{8}{n^3 - 3n^2 - 2n}$
B) $\dfrac{12}{n^3 - 3n^2 + 2n}$
C) $\dfrac{24}{n^3 - 3n^2 + 2n}$
D) $\dfrac{12}{n^3 - 2n^2 - 3n}$
E) $\dfrac{20}{n^3 - 2n^2 - 3n}$

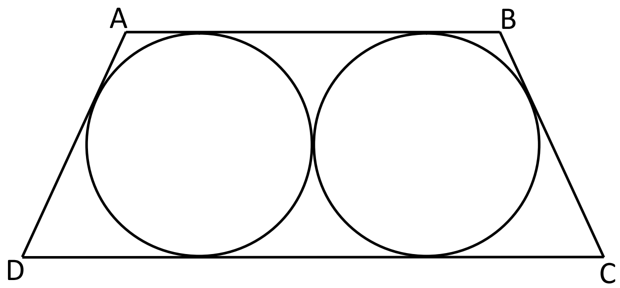
QUESTÃO 13

Vinte e três números reais são escritos em ordem crescente. O número central é igual à média aritmética simples dos outros vinte e dois números, além de ser 5 unidades maior do que o número anterior e 31 unidades menor do que o posterior. A média aritmética simples dos 13 menores números é 20 e a média aritmética simples dos 13 maiores é 80. Então, o número central é:

A) 49
B) 49,5
C) 50
D) 50,5
E) 51

QUESTÃO 14

Na figura abaixo, ABCD é um trapézio isósceles, com $AD = BC = 5$ cm e com a base maior $\overline{CD}$ medindo 6 cm a mais do que a base menor $\overline{AB}$. Duas circunferências, tangentes entre si, estão no interior deste trapézio, de modo que a circunferência da esquerda tangencia os lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ e a circunferência da direita tangencia os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. A medida dos raios das circunferências e a medida de $\overline{AB}$ são, respectivamente, em cm, iguais a:



A) 2 e 6
B) 4 e 6
C) 2 e 12
D) 4 e 12
E) 6 e 12

NÍVEL 3
(5 pontos para cada acerto)

QUESTÃO 15

Observe a sequência abaixo, formada por exatamente 6069 números:

$$\left(1, 2, 3, \ldots, 2022, 2023,\right.$$
$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2022^2, 2023^2,$$
$$\left.\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2022}, \sqrt{2023}\right)$$

Reordenando os elementos dessa sequência de modo a transformá-la em uma sequência não decrescente, obtém-se, como elemento central, o número:

A) 980
B) 981
C) 982
D) 983
E) 984

QUESTÃO 16

Um número inteiro é divisível por 11 se, e somente se, a soma dos seus algarismos de ordem par, subtraída da soma dos seus algarismos de ordem ímpar, resultar em um número divisível por 11. Nesta afirmação, a ordem de um algarismo está relacionada à posição que ele ocupa no número, da direita para a esquerda. Assim, os algarismos de ordem ímpar são os da unidade, centena, dezena de milhar e assim por diante, enquanto os de ordem par são os da dezena, milhar, centena de milhar e assim por diante. Portanto, pode-se afirmar que o número 1364 é divisível por 11 pois $(4+3)-(6+1)=0$ é divisível por 11. Já o número 28519 não é divisível por 11 pois $(9+5+2)-(1+8)=7$ não é divisível por 11. Desta forma, utilizando apenas os algarismos 0 e 1, quantos números diferentes podem ser escritos de modo que eles sejam divisíveis por 11 e contenham exatamente 11 algarismos?

A) 126
B) 205
C) 210
D) 255
E) 265

QUESTÃO 17

O Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que, para todo número natural n maior do que 1, existem números primos $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ e, também, números naturais não nulos α_1, α_2, α_3, ..., α_k, com k inteiro positivo, tais que:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Dizemos que o número n, escrito nessa forma, está decomposto como produto de potências cujas bases são números primos distintos dois a dois. Além disso, é possível provar que a soma S dos divisores naturais de um número natural $n > 1$ pode ser calculada por:

$$S = \left(p_1^0 + p_1^1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right) \times \left(p_2^0 + p_2^1 + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right) \times$$
$$\times \ldots \times \left(p_k^0 + p_k^1 + \ldots + p_k^{\alpha_k}\right)$$

Assim, por exemplo, a soma dos divisores naturais do número $2023 = 7 \cdot 17^2$ é:

$$S = \left(7^0 + 7^1\right)\left(17^0 + 17^1 + 17^2\right) =$$
$$= (1+7)(1+17+289) = 8 \cdot 307 = 2456$$

Munido dessas informações, e sabendo que a soma de todos os divisores naturais do inteiro positivo M é igual a 961, pode-se afirmar que a soma de todos os algarismos de M é igual a:

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

QUESTÃO 18

Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função de domínio $D \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição:

$$x + 2f\left(\frac{x+2021}{x-1}\right) = -1719 - f(x),$$

para $x \neq 1$. O valor de $f(2023)$ é:

A) 1
B) 10
C) 100
D) 1000
E) 2023

QUESTÃO 19

Um quadrado foi dividido em exatamente 64 quadrados menores, todos com lados de medidas inteiras em centímetros. Nesta divisão, há exatamente 60 quadrados amarelos, com $1\ cm^2$ de área cada, e 4 quadrados congruentes azuis, com mais do que $1\ cm^2$ de área cada. O perímetro de um quadrado azul é, em cm, um número:

A) Múltiplo de 6.
B) Múltiplo de 7.
C) Múltiplo de 8.
D) Múltiplo de 9.
E) Múltiplo de 10.

QUESTÃO 20

Dentre os primeiros 23 números naturais não nulos, Luana deve escolher 5 de maneira aleatória e colocá-los em ordem crescente, formando uma sequência de 5 números que usará em um jogo da escola. Feita a escolha e o ordenamento, a probabilidade de que o número 11 apareça como o elemento central da sequência é:

A) Menor do que 2%.
B) Maior do que 2% e menor do que 4%.
C) Maior do que 4% e menor do que 6%.
D) Maior do que 6% e menor do que 8%.
E) Maior do que 8% e menor do que 10%.

QUESTÃO 21

Considere uma malha quadriculada formada por 56 quadradinhos de área igual a $1\ cm^2$ cada, conforme as figuras abaixo. A Figura 1 destaca um hexágono de área A_1 e a Figura 2 destaca um hexágono de área A_2.

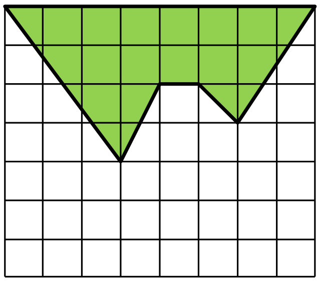


Figura 1

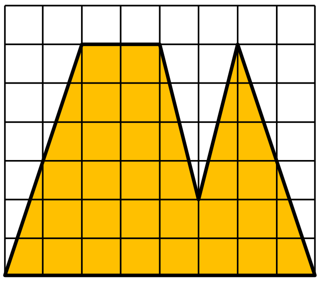


Figura 2

A região hachurada da Figura 3, abaixo, refere-se à intersecção dos hexágonos destacados nas Figuras 1 e 2 e possui área total igual a A_3, enquanto a região pintada de cinza refere-se ao complementar da união dos dois hexágonos destacados nas Figuras 1 e 2 em relação à área total da malha quadriculada, possuindo área total igual a A_4.

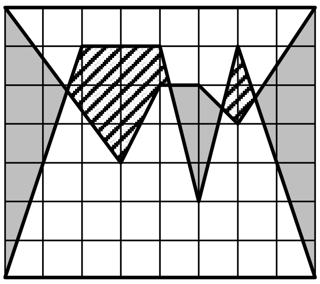


Figura 3

Deste modo, o valor de $4A_1 - 2A_2 - 6A_3 + 6A_4$ é:

A) $45{,}5\ cm^2$
B) $46{,}0\ cm^2$
C) $46{,}5\ cm^2$
D) $47{,}0\ cm^2$
E) $47{,}5\ cm^2$